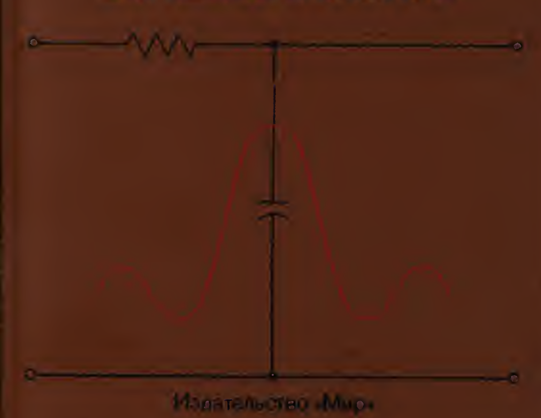
Дж. Купер, К. Макгиллем

Вероятностные методы анализа сигналов и систем



Издательство «Мир»

Вероятностные методы анализа сигналов и систем

Probabilistic Methods of Signal and System Analysis

Second Edition

George R. Cooper
Clare D. McGillem

Purdue University

HOLT, RINEHART AND WINSTON
NEW YORK CHICAGO SAN FRANCISCO PHILADELPHIA
MONTREAL TORONTO LONDON
SYDNEY TOKYO MEXICO CITY
RIO DE JANEIRO MADRID

Дж. Купер, К. Макгиллем

Вероятностные методы анализа сигналов и систем

Перевод с английского
Е. М. ЛИПОВЕЦКОГО
и канд. техн. наук
А. И. ПАПКОВА

под редакцией
д-ра техн. наук, проф.
В. Т. ГОРЯИНОВА



Москва «Мир» 1989

ББК 32.841
К92
УДК 621.372

Купер Дж., Макгиллем К.

К92 Вероятностные методы анализа сигналов и систем: Пер. с англ. — М.: Мир, 1989. — 376 с., ил.
ISBN 5-03-000366-5

В книге американских авторов последовательио рассмотреиы понятия теории вероятностей, иекоторые фуикции распределеиия вероятностей, элемеиты математической статистики. Изложеиы осиовиые сведеиия о случайиых процессах, рассмотрены оптимальиые линейиые системы.

Для преподавателей и студеитов радиотехиических специальностей, а также для иижеиеров, желающих ознакомиться с методами статистического аиализа сигиалов и систем.

$К\frac{2302020000-261}{041(01)-89}120-89$ ББК 32.841

Редакция литературы по электронике

Учебное издание

Джордж Купер, Клер Макгиллем

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА СИГНАЛОВ И СИСТЕМ

Заведующий редакцией Ю. А. Кузьмин
Ст. научный редактор М. Я. Рутковская
Художник В. Медников
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор Л. П. Бирюкова
Корректор Т. М. Подгорная

ИБ № 6871

Сдано в набор 08.09.88. Подписано к печати 23.02.89. Формат $60\times90^{1}/_{16}$. Бумага типографская № 1. Печать высокая. Гарнитура литературная. Объем 11,75 бум. л. Усл. печ. л. 23,5. Усл. кр.-отт. 23,5. Уч.-изд. л. 23,55. Изд. № 8/6164. Тираж 15 500 экз. Заказ 726. Цена 2 р.

В/О «Совэкспорткнига» Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР». 129820, ГСП. Москва. И-110, 1-й Рижский пер., 2

Отпечатано с набора Ленинградской типографии № 6 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 193144, г. Ленинград, ул. Моисеенко, 10 в Ленинградской типографии № 4 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 191126, Ленинград, Социалистическая ул., 14.

ISBN 5-03-000366-5 (русск.)
ISBN 0-03-070614-9 (англ.)

Предисловие редактора перевода

Предлагаемая вниманию читателя книга посвящена изложению основных понятий и положений теории вероятностей, математической статистики и теории случайных процессов. Повышенный интерес специалистов, проявляемый в настоящее время к этим разделам математики, объясняется тем, что большинство наблюдаемых явлений и процессов по своей природе являются случайными, поэтому для их описания лучше всего подходит специальный математический аппарат. Настоящая книга рассчитана на желающих познакомиться с вероятностными методами описания и анализа случайных явлений и процессов, встречающихся в повседневной практической деятельности человека. По построению и направленности книгу прежде всего следует рассматривать как учебное пособие для студентов технических вузов и инженеров, впервые приступающих к изучению вероятностных методов исследований. Однако некоторые ее разделы будут полезны и для более широкого круга специалистов. Наконец, большой круг рассматриваемых вопросов и наличие обширного справочного материала делают книгу весьма ценной в качестве справочника.

В существенно переработанном и дополненном виде книга издана за рубежом вторым изданием. К положительным качествам книги, отличающим ее от других известных отечественных и зарубежных публикаций, посвященных этой тематике, следует отнести

методически хорошо отработанное, логически последовательное и доходчивое изложение материала на достаточном для инженерных приложений уровне строгости,

широкий охват материала из классической теории вероятностей, математической статистики, теории случайных процессов и их преобразований линейными системами,

удачно подобранные и хорошо оформленные иллюстрации, большое число разобранных примеров, наличие в каждой главе задач для самостоятельного решения, снабженных ответами,

значительный объем разнообразных справочных сведений, практически исключающих необходимость обращения к другим источникам при изучении материала книги и решении задач.

Первые три главы посвящены теории вероятностей. В них дается понятие вероятностей событий как относительной частоты

появления этих событий, а затем на упрощенном уровне весьма доходчиво рассматривается аксиоматическое определение вероятности. Исследуются основные вероятностные характеристики, а также их обобщение на две и большее число случайных величин, введено понятие их статистической зависимости и корреляции.

В гл. 4, представляющей собой элементарное введение в математическую статистику, даны основные определения, относящиеся к статистической выборке, рассмотрен метод оценки математического ожидания и дисперсии случайной величины по результатам наблюдений, пояснен смысл интервальной оценки параметра и приведены основные понятия из теории принятия статистических гипотез.

Остальная часть книги посвящена изложению основных сведений по случайным процессам и их воздействию на линейную систему. В частности, дается классификация случайных процессов и описываются методы изучения их основных параметров и характеристик, рассмотрены корреляционная и взаимнокорреляционная функции случайных процессов. В заключение рассмотрены оптимальные по двум критериям линейные системы. Разнообразные сведения, приведенные в приложениях, будут полезны специалистам в области статистической радиотехники, систем управления, связи, радио- и гидролокации и т. д.

Читателю, желающему глубже изучить изложенные в книге проблемы, рекомендуем обратиться к перечисленным ниже публикациям.

Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. — 5-изд. — М.: Наука, 1969.

Вентцель Е. С. Теория вероятностей. — 3-е изд. — М.: Наука, 1964.

Пугачев В. С. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1979.

Чистяков В. П. Теория вероятностей. — 3-е изд. — М.: Наука, 1987.

Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах. — М.: Мир, 1984.

Крамер Г. Математические методы статистики. — 2-е изд. — М.: Мир, 1975.

Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. — М.: Радио и связь, 1982.

Тихонов В. И. Оптимальные методы приема. — М.: Радио и связь, 1985.

Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. В 3-х томах. — М.: Советское радио, 1974—1975.

Рытов С. М. Введение в теоретическую радиофизику. Часть I. — М.: Наука, 1976.

Август 1988 г. *В. Т. Горяинов*

Посвящается Лизе Купер и Энн Макгиллем, без поддержки и терпения которых это издание не было бы возможно.

Предисловие

Это второе издание книги, посвященной основам теории вероятностей и статистики, случайным процессам и анализу систем, входные сигналы которых носят случайный характер. Она написана на уровне, доступном студентам старших курсов технических ВУЗов, однако предполагается, что студент знаком с традиционными методами системного анализа — сверткой и преобразованиями. Кроме того, для аспирантов и инженеров эта книга может служить кратким обзором материала, который ранее встречался им в разрозненных источниках.

Настоящее издание отличается от предыдущего несколькими аспектами. Во-первых, чтобы обеспечить практическое применение понятий теории вероятностей, изложенных в первых трех главах, в книгу введен дополнительный материал по статистике. По всей книге приведены развернутые объяснения наиболее сложных понятий, снабженные значительно большим количеством примеров. Далее, чтобы читатель мог проверить, как он усвоил материал, в каждом разделе помещены дополнительные упражнения. И наконец, задачи, приведенные в конце каждой главы, являются абсолютно новыми и иллюстрируют более широкий диапазон приложений, чем в предыдущем издании.

Поскольку книга написана для инженеров, в ней используется скорее эвристический, чем строго математический подход, и читатель найдет множество примеров использования приведенных в ней понятий при решении технических задач. Однако этот подход вовсе не является математически упрощенным, так как много внимания уделялось тому, чтобы подчеркнуть ряд трудностей, что поможет более углубленному изучению предмета, когда в этом есть необходимость. По мнению авторов, чтобы процесс обучения был эффективным, нужно еще и еще раз возвращаться к сложным вопросам; наш учебник предназначен тем, кто впервые приступает к изучению теории вероятностей и случайных процессов, и авторы надеются, что это знакомство будет не последним. Поэтому изложение не является исчерпывающим, а посвящено отдельным темам, которые, как сочли авторы, наиболее полезны при решении технических задач.

Краткое описание некоторых наиболее важных особенностей этой книги поможет установить пределы практического приложения изложенного здесь материала. В гл. 1 вводятся элементарные понятия дискретной вероятности: вначале исходя из интуитивного представления об относительной частоте событий, а затем на основе более строгого подхода, использующего понятие аксиоматической вероятности. Все вводимые понятия поясняются простыми примерами, более близкими инженерам, чем традиционные примеры с извлечением из урн белых и красных шаров.

В гл. 2 вводится понятие случайной величины, дается представление о функциях распределения и плотности вероятностей, математическом ожидании и условной вероятности. Важной особенностью этой главы является развернутое рассмотрение различных плотностей распределения вероятностей и соответствующих приложений. В гл. 3 понятие случайной величины распространяется на ситуации с двумя или более таких величин, а также вводятся понятия статистической независимости и корреляции.

В гл. 4 включен абсолютно новый материал по статистике. Довольно подробно рассматривается теория выборки применительно к статистическим оценкам; подробно обсуждаются понятия математического ожидания и дисперсии выборки. Описывается распределение выборки; рассматривается и поясняется на большом числе примеров проверки статистических гипотез использование доверительных интервалов при принятии решений. Анализируется задача аппроксимации экспериментальных данных гладкими кривыми и на практических примерах поясняется метод линейной регрессии.

В гл. 5 дано общее обсуждение случайных процессов и их классификация. Основное внимание уделяется выбору вероятностных моделей, которые полезны при решении технических задач. Значительное место отведено рассмотрению физического смысла классификации различных процессов без излишней математической строгости. Уникальной особенностью этой главы, свойственной и последующему материалу, является введение в практику оценки математического ожидания случайного процесса по наблюдаемой выборочной функции.

В гл. 6 описываются свойства и применение корреляционной и взаимной корреляционной функций. Для более глубокого понимания их природы изложение снабжено большим числом примеров. Довольно подробно рассматривается важная задача оценки автокорреляционных функций.

Гл. 7 посвящена частотному представлению случайных процессов исходя из понятия спектральной плотности. В отличие от большинства других источников, где спектральная плотность определяется просто как фурье-преобразование корреляционной функции, здесь использован фундаментальный подход, позволяю-

щий прояснить физический смысл данного понятия. Хотя эта глава является самой сложной в книге, авторы убеждены, что материал следовало представить именно в такой форме. Преподаватели, которые хотят обойти фундаментальные задачи, могут опустить разд. 7.2, а чтобы не нарушалась непрерывность изложения материала, можно определить спектральную плотность просто как фурье-преобразование корреляционной функции.

Для оценки реакции линейных систем на случайные входные сигналы в гл. 8 используются понятия корреляционных функций и спектральной плотности. В некотором смысле эта глава является кульминационной и особенно важна для инженеров, которым приходится пользоваться этими понятиями, поэтому приводится много примеров, связанных с практическими задачами и подчеркивающих необходимость применения реалистичных и в то же время гибких математических моделей.

В гл. 9 понятия статистического анализа распространяются на системы, которые в определенном смысле можно считать оптимальными. При рассмотрении классического согласованного фильтра для известного сигнала и винеровского фильтра для случайного сигнала используется наиболее простой подход.

Чтобы читатель мог глубже изучить соответствующие вопросы, каждая глава снабжена списком литературы. Кроме того, в конце каждой главы приводятся разнообразные задачи. В приложениях даны таблицы функций, интегралов и другая полезная информация, которая поможет читателю при решении задач.

Упражнения в конце каждого раздела могут оказать дополнительную помощь в изучении и практическом использовании понятий и методов, рассматриваемых в настоящей книге. Следует относиться к ним как к обязательному материалу и непременно выполнить их прежде, чем перейти к следующему разделу. Для проверки правильности решений даются ответы, однако не всегда в той последовательности, в которой помещены упражнения. Это сделано намеренно, чтобы читатель имел возможность поразмышлять. Благодаря таким упражнениям существенно уменьшается число дополнительных задач, которые иначе пришлось бы подбирать самому преподавателю.

Материал, содержащийся в данной книге, использовался в Университете Пердью в курсе с тремя зачетами. При этом использовались не все разделы книги но по меньшей мере девять десятых включенного в нее материала. Опускались, как правило, разд. 3.6, 5.6, 6.4, 6.9, 7.9 и 9.6, но преподаватель может сам решить, какие разделы изучать не обязательно. Естественно, можно по-разному использовать изложенный в книге материал. К примеру, в течение одного семестра может быть прочитан менее интенсивный курс, если кроме указанных выше разделов полностью опустить гл. 9. В учебных заведениях, где принята система препода-

вания по четвертям, отмеченный материал может быть пройден в рамках курса с четырьмя зачетами. Однако если желателен курс с тремя зачетами, то кроме указанных разделов можно опустить и разд. 1.5—1.7, 1.9, 2.6, 3.5, 7.2, 7.8, 7.10 и 8.9, а также целиком гл. 9, если преподаватель даст небольшие пояснения, чтобы сохранялась непрерывность изложения.

Авторы считают своим приятным долгом выразить признательность как своим коллегам, так и студентам за помощь и поддержку. Из-за недостатка места всех их невозможно перечислить. Упомянем лишь тех, кто внес наиболее ценный вклад в работу над книгой. В связи с подготовкой первого издания отметим проф. Дж. Лу и проф. П. Уинца, а также д-ра Л. Термена (все из Университета Пердью). Мы также искренне благодарим проф. Дж. Кеммерли (Университет шт. Калифорния, Фуллертон) и проф. Дж. Масси (Швейцарский федеральный технологический институт). Их многочисленные замечания сильно улучшили книгу.

При подготовке второго издания немало ценных замечаний внесли проф. Э. У. Чандлер (Маркеттский университет) и рецензенты, приглашенные нашим редактором Деборой Мур: Р. Уильямс (Университет шт. Нью-Мексико). Р. Кристиансен (Университет Брайхем-Янга), Д. Хили (Технологический институт, шт. Джорджия), Х. ван Лэндингем (Политехнический институт, шт. Виргиния), а также С. Дьянат (Рочестерский технологический институт). Мы особенно благодарим д-ра Ч. Чена за подготовку руководства по решению задач и чтение корректур. И наконец, последними по порядку, но никак не по весомости внесенного вклада следует отметить сотни студентов, которые учились по первому изданию книги и высказали свои критические замечания.

Джордж Р. Купер
Февраль 1986 г. *Клэр Д. Макгиллем*

Глава 1

Введение в теорию вероятностей

1.1. Применение теории вероятностей в технике

Прежде чем приступать к изучению элементов теории вероятностей, целесообразно обосновать необходимость этого, поразмыслив над тем, действительно ли теория вероятностей применима при решении технических задач. Такое обоснование можно дать, используя два различных подхода. Первый из них заключается в принятии точки зрения, согласно которой подчеркивалась бы универсальная физическая сущность понятия *вероятность*, а теория вероятностей не рассматривалась бы как еще одна математическая дисциплина, полезная в особых случаях. Второй подход связан с тем, что из множества различных ситуаций, встречающихся в обычной инженерной практике, можно выделить такие, где использование понятия вероятности является обязательным.

Характерная особенность теории вероятностей состоит в том, что она рассматривает явления, где в той или иной форме присутствует неопределенность. Широко распространенное представление связывает неопределенность и, следовательно, вероятность с такими ситуациями, как игра в кости, в рулетку, вытаскивание карт из колоды и т. п. Поскольку законы теории вероятностей известны далеко не всем, а явления, перечисленные выше, могут быть достаточно сложными, большинство считает, что теория вероятностей представляет собой загадочную и понятную лишь избранным область науки, применять которую способны только профессиональные математики, а в реальной жизни она имеет ограниченную ценность. Теория вероятностей имеет дело с неопределенностью, поэтому бытует еще одна точка зрения, суть которой в том, что вероятностные методы решения практических задач считаются далеко не лучшей заменой более предпочтительному точному анализу, так как обращаться к подобным методам специалист вынужден якобы в связи с отсутствием достаточно полной информации. Оба этих мнения неверны.

В отношении предполагаемой сложности теории вероятностей стоит заметить, что вряд ли есть еще хотя бы одна область математики, которая с такой же полнотой базируется на столь ограниченном наборе легко понимаемых исходных представлений. Из дальнейшего рассмотрения станет ясно, что эта теория строится всего на трех аксиомах, которые почти очевидны. Как только эти

аксиомы и соответствующие выводы из них усвоены, дальнейшие представления логически вытекают из них.

Подход, при котором теория вероятностей рассматривается в качестве заменителя строгих аналитических методов, проистекает из практики представлять физические законы детерминистическими, нерушимыми и справедливыми при любых обстоятельствах. Так, предполагается, что, используя закон, предсказывающий реакцию динамической системы на внешнее воздействие, можно добиться абсолютной точности предсказания, если точно известно это воздействие. Например, полагают, что закон Ома $u(t) = Ri(t)$ справедлив для любого момента времени, и на макроуровне такое предположение можно считать вполне обоснованным. Однако на микроуровне оно явно будет неверным — факт, который очевиден любому, кто когда-нибудь подключал резистор большого номинала к входу усилителя с высоким коэффициентом усиления и слышал шумы, появляющиеся в результате этого на выходе.

Исходя из современных физических воззрений и развивающихся знаний о природе материи представляется, что подход, в рамках которого законы природы считают детерминистическими и непреложными, необоснован. В лучшем случае эти законы отражают «поведение» природы, так сказать, «в среднем». Во многих важных ситуациях такое «среднее поведение» достаточно близко к тому, что наблюдается на практике, и имеющимися отклонениями можно пренебречь. В таких случаях детерминистические законы особенно ценны, поскольку позволяют предсказать поведение системы без излишних сложностей. В других, не менее важных ситуациях случайные отклонения могут оказаться значительными, возможно даже более значительными, чем детерминированное действие. В этих случаях следует использовать аналитические методы, построенные на основе вероятностных концепций.

Из приведенных рассуждений должно быть ясно, что так называемое «точное решение» вовсе не всегда является точным и, более того, представляет собой идеализированный частный случай, который на практике никогда не встречается. С другой стороны, вероятностный подход — далеко не худшая замена точным методам решения и наиболее четко отражает физическую реальность. Кроме того, он включает в себя результат детерминистического подхода в качестве частного случая.

Теперь имеет смысл описать типы ситуаций, при которых может использоваться вероятностный подход. В приведенных здесь примерах сделан упор на случаи, которые встречаются при исследованиях систем и отражают тот непреложный факт, что применение вероятностных методов расчета при решении практических задач скорее правило, чем исключение.

Случайные входные сигналы. Чтобы та или иная физическая система могла выполнять определенные функции, к ней обычно должно быть приложено какое-то вынуждающее воздействие (входной сигнал). В отдельных случаях при анализе таких систем с методологической точки зрения допустимо рассматривать входные сигналы как детерминированные и имеющие простое математическое представление. Однако на практике такие сигналы редко встречаются. Напротив, поведение входного сигнала чаще всего неопределенно и непредсказуемо, в связи с чем его следует рассматривать как случайный. Имеется множество таких примеров: музыкальные и речевые сигналы, которые служат входными для систем связи; случайные цифровые последовательности, поступающие в ЭВМ; случайные сигналы управления, подаваемые на систему управления летательного аппарата; случайные сигналы, полученные в ходе измерения некоторых характеристик изготавливаемого изделия и используемые в качестве входных для системы управления технологическим процессом; движения рулевого колеса для системы гидроусилителя рулевого управления; последовательность нажатия в лифте кнопок вызова и управления; число транспортных средств, проходящих мимо контрольных пунктов системы управления дорожным движением; флуктуации температуры снаружи и внутри здания, информация о которых подается на вход системы отопления и кондиционирования, и т. д.

Случайные возмущения. На входах и выходах многих систем кроме полезных сигналов присутствуют нежелательные возмущения. Они почти всегда случайны по своей природе, поэтому приходится прибегать к вероятностным методам расчетов даже тогда, когда полезные сигналы не требуют этого. Познакомимся на нескольких примерах с различными типами таких возмущений. Если, к примеру, сигнал с выхода усилителя с большим коэффициентом усиления подается на громкоговоритель, то последний воспроизводит трески, шорохи и щелчки. Причиной этих случайных шумов служит тепловое движение электронов во входной цепи усилителя или случайные изменения числа электронов, проходящих через транзисторы. Ясно, что нельзя заранее рассчитать шум для каждого момента времени, поскольку он вызывается буквально миллиардами отдельных случайно движущихся зарядов. Можно, однако, найти среднюю мощность шума, определить его спектр и даже вероятность того, что его наблюдаемое значение превысит какой-то заданный уровень. С практической точки зрения для определения качества усилителя знание этих количественных параметров важнее информации о формах сигналов и их мгновенных значениях.

Другой пример — работа телевизора или радиоприемника.

Помимо шума, генерируемого в них за счет описанного выше механизма, имеются случайные шумы, принимаемые антенной. Они возникают из-за электромагнитных бурь; помех, связанных с работой промышленности и транспорта; космических лучей или теплового излучения окружающих объектов и т. п. Следовательно, если бы даже и можно было создать идеальные (в определенном смысле) приемники или усилители, принятый сигнал все равно оказался бы смешанным с шумом. И снова определение средней мощности и частотного спектра может принести большую пользу, чем знание мгновенных значений сигнала.

Систему другого типа проиллюстрируем на примере большой антенны РЛС, которая при помощи автоматической системы наведения может устанавливаться в любом положении. В антенне под действием ветра возникают случайные силы, которые должны компенсироваться автоматической системой наведения. Поскольку компенсация не может быть идеальной, всегда имеют место случайные флуктуации положения антенны, и важно уметь находить их среднее квадратическое значение и спектральный состав.

Еще одним примером может служить полет самолета в турбулентной атмосфере или поведение корабля во время шторма или перемещение автомобиля повышенной проходимости по пересеченной местности. Во всех этих ситуациях хаотические возмущающие воздействия, приложенные к сложным механическим системам, существуют наряду с необходимыми сигналами управления и наведения. Важно знать, какова будет реакция системы на эти воздействия.

Случайные параметры систем. В ряде случаев те или иные параметры системы могут быть не известны или изменяться случайным образом. Типичными примерами таких систем являются самолеты, нагрузка которых от рейса к рейсу изменяется случайным образом (в зависимости от числа пассажиров или веса груза); системы тропосферной связи, в которых затухание на трассе случайно и сильно меняется во времени; электрические энергосети нагрузки которых (т. е. энергопотребление) непредсказуемы и варьируются в широких пределах; телефонные системы, число пользователей которых случайным образом меняется от момента к моменту и т. д.

Существует также множество электронных систем, параметры которых носят случайный характер. Например, свойства различных полупроводниковых приборов: диодов, транзисторов, логических схем совпадения, сдвиговых регистров, триггеров и т. п. — описывают, задавая диапазоны значений наиболее важных параметров. Какое количественное значение примет соответствующий параметр, значение которого лежит в пределах заданного диапазона, заранее не известно.

Надежность систем. В состав любой системы входит большое количество различных элементов, и один или несколько из них могут выйти из строя, вызвав отказ всей системы или ее части. Моменты времени, в которые будут происходить отказы, заранее не известны, однако часто можно определить вероятности отказов отдельных элементов, а по ним — *среднее время наработки на отказ*. Теория вероятностей широко применяется при исследовании вопросов надежности, которой при конструировании уделяется очень большое внимание. По мере усложнения и повышения стоимости систем, включающих все большее число элементов, обеспечить надежность сложнее, и этой проблеме следует уделить больше внимания.

Контроль качества. Важным методом повышения надежности систем является улучшение качества отдельных элементов, а этого можно добиться введением их проверки. Поскольку проверка всех элементов после окончания каждого из этапов процесса производства может оказаться слишком дорогостоящей, необходимо разработать правила проверки отдельных элементов, выбранных случайным образом. Такие правила основываются на представлениях теории вероятностей и служат важной цели поддержания качества изделия на заданном уровне при минимальных затратах.

Теория информации. Главная цель теории информации состоит в нахождении количественной меры информационного содержания сообщений, таких, как печатный текст, речь, изображения, графические или численные данные, результаты измерений температуры, расстояния, скорости, интенсивности излучения, количества выпавших осадков и т. д. Использование такой количественной меры необходимо при создании каналов связи, служащих для передачи информации и одновременно сочетающих в себе низкую стоимость и приемлемый уровень рабочих характеристик. Поскольку результаты указанных выше измерений и соответствующие им сообщения почти всегда заранее не известны и носят случайный характер, их описание может выполняться только с привлечением теории вероятностей. Следовательно, соответствующая мера информации должна быть вероятностной. Кроме того, каналы связи подвергаются воздействию случайных возмущений (шума), которые ограничивают их пропускную способность, и описание этого процесса также должно быть вероятностным.

Из приведенного краткого перечисления ясно, что при решении почти любой технической задачи приходится встречаться с неопределенностью или случайностью, а это делает теорию вероятностей необходимым инструментом современного инженера.

При статистическом анализе систем всегда нужно описывать случайные сигналы и возмущения. Для этого используют два основных математических метода. Первым из них, наиболее фундаментальным, является *вероятностное описание*, в котором случайная величина представляется вероятностной моделью. Этот метод будет рассмотрен ниже.

Вероятностное описание случайных сигналов в ходе системного анализа непосредственно не применяется, поскольку оно не содержит исчерпывающей информации о том, как эти сигналы изменяются во времени или каковы их частотные спектры. Оно дает, однако, возможность получить *статистическое описание* случайных сигналов, которое может быть использовано для анализа тех или иных систем. В данном случае случайный сигнал характеризуется статистической моделью, представляющей собой соответствующий набор усредненных значений и функций: математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, корреляционная функция, спектральная плотность и т. д. Точность описания случайного сигнала с помощью этих характеристик не так высока, как при использовании веростностной модели, однако они более пригодны для статистического анализа систем, поскольку могут быть вычислены прямыми и относительно несложными методами. Мы еще вернемся к рассмотрению этих величин и функций в последующих главах.

Прежде чем применять понятия теории вероятностей и математической статистики к системному анализу, необходимо предварительно выполнить ряд дополнительных шагов. Первый — это введение в рассмотрение дискретных случайных величин в рамках теории вероятностей. Затем следует их распространение на непрерывные случайные величины и далее — на величины, являющиеся функциями времени. И наконец, следует ввести ряд усредненных значений и функций, связанных со случайными сигналами. Только после этого можно перейти к рассмотрению способов, которые могут использоваться для нахождения реакции линейных систем на случайные входные сигналы.

1.2. Опыты со случайным исходом и случайные события

Среди основных понятий теории вероятностей понятия *опыт* и *событие* являются фундаментальными. Опыт — это некоторое действие, заканчивающееся некоторым *исходом*. Исход *случайного опыта* не известен до его окончания. Хотя есть строгое математическое определение понятия «случайный опыт», достаточно глубоко проникнуть в его суть можно, рассмотрев несколько примеров таких опытов и их исходов; они перечислены в табл. 1.1. Однако необходимо отметить, что возможные исходы часто могут быть определены различными способами в соответствии с жела-

ниями экспериментатора. В ходе начального обсуждения будет рассматриваться однократное выполнение четко определенного опыта. Его называют *испытанием*.

Таблица 1.1

Гипотетические опыты и их исходы

Опыт	Возможные исходы опыта
Подбрасывание монеты	Выпадение решетки или герба
Бросание игральной кости	Выпадение очка 1, 2, 3, 4, 5, 6
Вытаскивание карты из колоды	Любая из 52 карт
Измерение напряжения	Больше нуля или меньше нуля
	Больше U или меньше U
	От U_1 до U_2 или вне диапазона от U_1 до U_2

Важным понятием, связанным со случайными событиями, является понятие *равновозможности*. Например, если мы бросаем монету, то ожидаем, что события, связанные с выпадением решетки или герба, равновозможны. Аналогично, в случае игрального кубика мы считаем равновозможными события, связанные с выпадением любой цифры от 1 до 6. Если вытаскивается карта из колоды, равновозможным считают появление любой карты из 52. Часто вместо термина «равновозможный» употребляют термин *взятый наугад*, являющийся синонимом. Например, когда мы говорим: «карта из колоды взята наугад», то подразумеваем, что вытаскивание любой из них равновозможно. В общем мы всегда полагаем вероятные исходы опыта равновозможными, если не видим явных доводов против такого предположения. Ниже будут приведены примеры событий, предполагаемых равновозможными и *неравновозможными*. Читатель должен четко понимать, какие физические причины приводят к одному из этих предположений.

Важно также различать *элементарные* и *сложные* события. Элементарным называется событие, которому может соответствовать только один исход. В качестве примеров могут служить подбрасывание монеты или бросание игральной кости, если особым образом определить соответствующие события. При подбрасывании монеты события, заключающиеся в выпадении герба или решетки, могут произойти только по отдельности. Аналогично, при бросании игральной кости событие, заключающееся в выпадении любого очка от 1 до 6, исключает другие возможные исходы. Следовательно, в обоих случаях определяемые события являются элементарными. С другой стороны, можно определить события, связанные с бросанием игральной кости, которые не будут эле-

ментарными. Например, пусть одно из них заключается в выпадении четного очка, а другое — нечетного. В этом случае каждое из событий может иметь место при трех различных исходах опыта, и следовательно, они являются сложными.

Во многих различающихся случайных опытах события могут быть определены либо как элементарные, либо как сложные. К примеру, если из колоды в 52 карты наугад выбирается одна, то возможны 52 элементарных события, каждое из которых соответствует вытаскиванию определенной карты. С другой стороны, событие, заключающееся в том, что масть выбранной карты окажется «черви» — сложное, поскольку оно имеет место при 13 различных исходах. Аналогично, событие, заключающееся в вытаскивании любого туза, — сложное, так как к нему ведут четыре исхода. Понятно, что имеется множество других способов определения сложных событий.

Говорят, что исходы опыта являются *дискретными*, если их множество является счетным (т. е. если каждому из них может быть однозначно поставлен в соответствие номер, выраженный целым числом). Во всех рассмотренных примерах фигурировали дискретные исходы. Однако во многих опытах множество исходов не является счетным. Например, в случае измерения электрического напряжения, изменения которого носят случайный характер, исходом опыта является величина напряжения, множество значений которого будет бесконечным и несчетным. Говорят, что в такой ситуации множество исходов образует *континуум*. При таких обстоятельствах понятие элементарного события неприменимо.

Можно выполнить более сложные опыты с расширенным набором возможных исходов. Один из этих опытов может заключаться в одновременном бросании десяти монет: ясно, что при этом будет наблюдаться множество различных исходов, каждый из которых является событием. Другим примером, связанным с инженерной практикой, является телефонная сеть, включающая 10 000 аппаратов. Событие, состоящее в том, что в данный момент времени используется 2000 телефонов, имеет вполне определенную вероятность. Очевидно, возможны и другие события.

Если до окончания опыта его исход не известен, то последний считают случайным событием. Каждому из таких событий можно поставить в соответствие определенное число, называемое его *вероятностью* и являющееся мерой возможности совершения этого события. Обычно вероятности событий выбирают произвольно, опираясь на интуитивное представление о возможных исходах опыта. К примеру, в случае бросания монеты ожидают, что исходы в виде выпадения герба или решетки равновозможны. В связи с этим следует предполагать, что и вероятности соответствующих событий одинаковы.

1.3. Определения понятия «вероятность»

Наибольшую трудность при изучении элементов теории вероятностей представляет принятие удовлетворительного определения вероятности. Существуют четыре или пять различных определений, которые в свое время были предложены и сейчас используются с разной степенью успеха. Каждому из них присущи недостатки, связанные либо с принятой концепцией, либо с возможными приложениями. Как это ни удивительно, в самом удачном варианте вероятность никак не определяют.

Из всех подходов к определению вероятности чаще всего используют два: *относительно-частотный* и *аксиоматический*. Первый из них применяют потому, что в этом случае понятию «вероятность» пытаются придать некоторый физический смысл и, таким образом, связать понятия теории вероятностей с явлениями реального мира. Следовательно, приложение этой теории к решению технических задач почти всегда выполняется путем обращения к концепции относительной частоты события, хотя иногда инженер может поступать так неосознанно.

Ограничение такого подхода заключается в сложности использования его для получения соответствующего математического описания в случаях, слишком трудных для анализа с точки зрения физического их обоснования. Это вовсе не означает, что он не может быть употреблен в таких случаях, однако изложенное наводит на мысль о существовании более простого подхода к решению задач в ситуациях описываемого типа. Таким более простым подходом оказывается аксиоматический.

В аксиоматическом подходе вероятность события трактуется как некая численная величина, которая удовлетворяет определенным постулатам, но более никак не определяется. Вопрос о том, соотносится ли она с явлениями реального мира или нет, не является поводом для размышлений при развитии математических построений, отправной точкой которых служат принятые постулаты. Инженеры могут выдвинуть возражения против такого подхода, как искусственного и далекого от реальности, но следует помнить, что все здание теории цепей было построено фактически таким же путем. При этом фундаментальными постулатами послужили законы Кирхгофа и закон сохранения энергии. Независимо от того, какие физические величины обозначаются абстрактными математическими символами, возникает та же математическая модель, даже в случае полного отсутствия связи этих символов с какими-либо физическими величинами. Задача инженера состоит в выборе такого способа соотнесения математической модели и явлений реального мира, чтобы получить хотя и приближенные, но полезные решения практических задач.

Из приведенных рассуждений следует, что наиболее подходящим для инженерных целей подходом к определению вероятности должен быть двунаправленный подход, при котором понятие относительной частоты некоторого случайного события используется для соотнесения простых результатов с физической реальностью, а аксиоматический подход — для получения математических описаний, соответствующих более сложным ситуациям. Авторы придерживаются именно этой точки зрения.

1.4. Относительно-частотный подход

Как следует из самого названия, этот подход к определению вероятности имеет тесную связь с частотой появления определенных событий. Частота появления любого заданного события используется для определения численной величины, называемой *вероятностью* этого события и являющейся мерой того, сколь велика возможность его возникновения. Предположения о возможных значениях вероятностей обычно выдвигаются *a priori*, причем они основываются на наших интуитивных представлениях о проводимом опыте и равновозможности событий.

В целях более строгого изложения этой концепции рассмотрим выполняемый N раз опыт, имеющий четыре возможных исхода, считающихся элементарными событиями A, B, C, D. Пусть событие A случается N_A раз, а события B, C, D — N_B, N_C и N_D раз соответственно. Ясно, что

$$N_A + N_B + N_C + N_D = N. \tag{1.1}$$

Теперь определим относительную частоту $r(A)$ события A как

$$r(A) = N_A/N.$$

Из выражения (1.1) следует, что

$$r(A) + r(B) + r(C) + r(D) = 1. \tag{1.2}$$

Представим, что число N неограниченно возрастает. В этом случае наблюдается явление, называемое *статистическим упорядочением*, и относительная частота $r(A)$ все меньше варьируется и приближается к какому-то постоянному значению $\mathrm{P}(A)$, которое и может считаться вероятностью элементарного события A, т. е.

$$\mathrm{P}(A) = \lim_{N\to\infty} r(A). \tag{1.3}$$

Из приведенных выше соотношений следует, что

$$\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) + \mathrm{P}(D) + \cdots + \mathrm{P}(M) = 1, \tag{1.4}$$

и можно сделать следующее заключение: сумма вероятностей всех взаимно исключающих (несовместных) событий, которые могут наступать в результате данного опыта, должна равняться 1.

Сформулированные понятия можно свести к ряду положений:

1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

2) $P(A) + P(B) + \dots + P(M) = 1$ для полного набора взаимно исключающих событий;

3) вероятность невозможного события равна нулю (например, $P(A) = 0$);

4) вероятность достоверного события равна единице (например, $P(A) = 1$).

В целях уточнения смысла некоторых из этих положений проведем следующий гипотетический опыт. Пусть в большой коробке в совершенно произвольном порядке лежат резисторы различных номиналов. Допустим, в частности, что 100 резисторов имеет номинальное сопротивление 1 Ом, 500 резисторов — 10 Ом, 150 резисторов — 100 Ом и 250 резисторов — 1000 Ом. Предположим, что из коробки наугад берут один резистор. Поскольку в опыте фигурируют всего четыре номинала, он может иметь четыре возможных исхода. Определим вероятности каждого из соответствующих событий. Будем считать, что они пропорциональны количествам находящихся в коробке резисторов различных номиналов, выбор которых означает наступление того или иного события. Поскольку в коробке всего 1000 резисторов, результирующие вероятности будут такими:

$$P(1\ \text{Ом}) = 100/1000 = 0{,}1,$$

$$P(10\ \text{Ом}) = 500/1000 = 0{,}5,$$

$$P(100\ \text{Ом}) = 150/1000 = 0{,}15,$$

$$P(1000\ \text{Ом}) = 250/1000 = 0{,}25.$$

Обратите внимание, что все они — положительные числа меньше единицы, а сумма их равна 1.

Во многих ситуациях интересно знать вероятность многократного события. Пусть монету подбрасывают дважды; возникает вопрос: какова вероятность выпадения решетки два раза подряд? Вероятность такого события называется *совместной вероятностью*. Имеет смысл предположить, что в рассматриваемой ситуации все четыре возможных события (выпадения решетка—решетка, решетка—герб, герб—решетка и герб—герб) равновозможны, и следовательно, вероятность каждого из них составляет 1/4. В других, более близких к практике случаях дело обстоит сложнее, так что для выяснения истинной природы совместной вероятности необходимо рассмотреть не такой простой пример. С этой целью введем обозначение $P(A, B)$ для совместной вероятности двух случайных событий A и B.

Пусть в рассмотренном выше примере резисторы в коробке различаются не только по номиналам, но и по мощностям рассея-

ния. Предположим, что последние могут равняться 1, 2 или 5 Вт. Количество резисторов каждой мощности указаны в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Количество резисторов с различными номинальными сопротивлениями и предельными мощностями рассеяния

Мощность рассеяния	Количество резисторов с номинальным сопротивлением:				Всего:
	1 Ом	10 Ом	100 Ом	1000 Ом	
1 Вт	50	300	90	0	440
2 Вт	50	50	0	100	200
5 Вт	0	150	60	150	360
Итого:	100	500	150	250	1000

Прежде чем обращаться к примеру, который позволит лучше понять смысл понятия «совместная вероятность», найдем вероятности вытаскивания резисторов любого номинала определенной мощности рассеяния (будем эти вероятности называть *априорными*). В последнем столбце табл. 1.2 указаны суммарные количества резисторов определенной мощности рассеяния; исходя из этих количеств можно подсчитать искомые вероятности:

$$P\ (1\ \text{Вт}) = 440/1000 = 0{,}44,\ \ P\ (2\ \text{Вт}) = 200/1000 = 0{,}2,$$

$$P\ (5\ \text{Вт}) = 360/1000 = 0{,}36.$$

Выясним теперь, какова совместная вероятность события, заключающегося в выборе резистора с номинальным сопротивлением 10 Ом и мощностью рассеяния 5 Вт. Поскольку в коробке 150 таких резисторов, ясно, что $P\ (10\ \text{Ом},\ 5\ \text{Вт}) = 150/1000 = 0{,}15$.

Значения других 11 совместных вероятностей могут быть найдены аналогичным образом. Обратите внимание на тот факт, что некоторые из них будут равны нулю (например, $P\ (1\ \text{Ом},\ 5\ \text{Вт}) = 0$) просто из-за отсутствия соответствующих комбинаций сопротивлений и мощностей.

Теперь необходимо соотнести между собой понятия совместной и априорной вероятностей. В примере с двукратным бросанием монеты связь между ними выражается простым произведением, т. е.

$$P\ (\text{решетка—решетка}) =$$
$$= P\ (\text{решетка}) \cdot P\ (\text{решетка}) = (1/2) \cdot (1/2) = 1/4.$$

Однако для рассматриваемого примера с резисторами (табл. 1.2) указанная зависимость не выполняется. Чтобы убедиться в этом,

напомним, что P (5 Вт) = 360/1000 = 0,36 и, как было показано выше, P (10 Ом) = 0,5. Таким образом,

$$P\ (10\ \text{Ом})\ P\ (5\ \text{Вт}) = 0{,}5 \cdot 0{,}36 =$$
$$= 0{,}18 \neq P\ (10\ \text{Ом},\ 5\ \text{Вт}) = 0{,}15,$$

и совместная вероятность не равна произведению априорных вероятностей.

Чтобы лучше понять полученный результат, необходимо ввести понятие *условной вероятности*. Это вероятность осуществления однократного события A при условии, что произошло событие B; обозначение, принятое для нее, — $P\ (A \mid B)$. Вернувшись к примеру с резисторами, найдем условную вероятность выбора 5-ваттного резистора с номинальным сопротивлением 10 Ом. Поскольку 5-ваттных резисторов всего 360, а 150 из них — 10-омные, то

$$P\ (10\ \text{Ом} \mid 5\ \text{Вт}) = 150/360 = 0{,}417.$$

Теперь найдем произведение этой условной вероятности и априорной вероятности выбора 5-ваттного резистора:

$$P\ (10\ \text{Ом} \mid 5\ \text{Вт})\ P\ (5\ \text{Вт}) = 0{,}417 \cdot 0{,}36 =$$
$$= 0{,}15 = P\ (10\ \text{Ом},\ 5\ \text{Вт}).$$

Мы видим, что произведение априорной и условной вероятностей равно совместной вероятности.

Тот же самый результат можно получить и другим путем. Рассмотрим условную вероятность

$$P\ (5\ \text{Вт} \mid 10\ \text{Ом}) = 150/500 = 0{,}30,$$

которая определяется наличием 150 5-ваттных резисторов среди 500 10-омных резисторов. Затем найдем произведение

$$P\ (5\ \text{Вт} \mid 10\ \text{Ом})\ P\ (10\ \text{Ом}) = 0{,}30 \cdot 0{,}5 =$$
$$= P\ (10\ \text{Ом},\ 5\ \text{Вт}). \qquad (1.5)$$

И снова произведение соответствующих априорной и условной вероятностей равно совместной вероятности.

Исходя из приведенных соображений можно записать общее выражение

$$P\ (A,\ B) = P\ (A \mid B)\ P\ (B) = P\ (B \mid A)\ P\ (A), \qquad (1.6)$$

из которого следует, что совместная вероятность двух событий всегда может быть представлена в виде произведения априорной вероятности одного из них и условной вероятности другого при условии осуществления первого.

Теперь обратимся к случаю с бросанием монеты, с помощью которого показано, что совместная вероятность представляет со-

бой произведение двух априорных. При каких условиях это утверждение справедливо? Как следует из формулы (1.6), когда $P(A|B) = P(A)$ и $P(B|A) = P(B)$, т. е. когда вероятность события A не зависит от того, имело ли место событие B. При бросании монеты ситуация именно такова, поскольку результат одной попытки никак не влияет на исход другой. Такие события называют *статистически независимыми*. Дадим этому понятию строгое определение. Итак, два случайных события являются статистически независимыми тогда и только тогда, когда

$$P(A, B) = P(A) P(B). \tag{1.7}$$

Выше очень кратко были рассмотрены многие из основных понятий дискретной вероятности. Они были введены эвристически, без какого-либо математического доказательства. Понятия теории вероятностей вводились исходя из представления об относительной частоте и равновозможности событий на отдельных числовых примерах. Из них следует, что присвоение вероятностям различных событий приемлемых численных значений (в рамках относительно-частотного подхода) не связано с особыми сложностями, если ситуация достаточно далека от реальности. Тем не менее должно быть очевидным, что такой подход становится непригодным, если опыт может иметь множество различных исходов и если существует более чем один способ определения событий. В частности, так обстоит дело при попытках распространения результатов, полученных для дискретной вероятности, на случай бесконечного (несчетного) множества исходов. Поэтому необходимо вновь и более тщательно рассмотреть все высказанные соображения и воспользоваться строгим математическим подходом, который обеспечит более прочную основу для проведения дальнейшего анализа.

Упражнение 1.4.1. Известно, что из 25 транзисторов, находящихся в коробке, 8 неисправны. Берут наугад один из них и проверяют. Какова вероятность того, что

а) этот транзистор неисправен?

б) второй взятый наугад транзистор также окажется неисправным?

в) второй выбранный случайным образом транзистор окажется неисправным, если первый оказался хорошим?

Ответы: 1/3, 8/25, 7/24.*)

Упражнение 1.4.2. Автоинспекцией было установлено, что на загруженной магистрали грузовики составляют третью часть всего потока. Кроме того, оказалось, что каждый десятый легковой автомобиль и каждый двадцатый грузовик имеют неисправности. Какова вероятность того, что

а) очередной подъезжающий к пункту автоинспекции автомобиль — неисправный грузовик?

б) следующее транспортное средство окажется грузовым автомобилем, если известно, что оно неисправно?

*) Ответы к этому и другим упражнениям, приведенным в тексте, не всегда даются в порядке следования вопросов.

в) проходящее транспортное средство окажется грузовым автомобилем, если известно, что перед этим проехал легковой автомобиль?

Ответы: 1/5, 1/3, 1/60.

1.5. Основы теории множеств

Более строгое определение вероятности, о котором упоминалось в разд. 1.4, завершается в этом разделе изложением соответствующих соображений в рамках аксиоматического подхода. Для этого требуется предварительное ознакомление с основными понятиями *теории множеств*.

Множество — это некоторый набор объектов, называемых *элементами*. Оно обозначается следующим образом:

$$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}, \tag{1.8}$$

где A — множество, α_1, α_2, ..., α_n — его элементы. Множество A может состоять из натуральных чисел 1, 2, ..., 6, при этом его элементами будут $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, ..., $\alpha_6 = 6$. Любой набор, каждый элемент которого принадлежит множеству A, является его *подмножеством*. Так, $B = \{1, 2, 3\}$ — подмножество $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; это обозначается следующим образом: $B \subset A$. Обратите внимание, что любое множество одновременно является своим собственным подмножеством.

Все рассматриваемые в теории вероятностей множества содержат элементарные события, принадлежащие наибольшему множеству S, называемому *пространством элементарных событий*. Следовательно, все они являются его подмножествами. Связь пространства S и его подмножеств с вероятностью скоро станет понятной, а пока приведем пример. Предположим, что элементами пространства S являются шесть возможных исходов бросания игральной кости 1, 2, ..., 6. Таким образом, $S = \{1, 2, \ldots, 6\}$. Подмножества могут формироваться многими способами в зависимости от количества входящих в них элементов. С учетом *пустого множества*, которое вообще не содержит элементов и обозначается знаком $\varnothing$, в рассматриваемом множестве может быть выделено в общей сложности $2^6 = 64$ подмножества: $\varnothing$, $\{1\}$, ..., $\{6\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, ..., $\{5, 6\}$, $\{1, 2, 3\}$, ..., S. В общем случае если множество S содержит n элементов, в нем можно выделить 2^n подмножеств. Доказательство этого положения оставлено читателям в качестве упражнения.

Одна из причин применения теории множеств в теории вероятностей заключается в том, что для множеств определены важные преобразования, которые имеют простое геометрическое представление — наглядное и облегчающее понимание смысла этих преобразований. Оно носит название *диаграммы Эйлера—Венна* и на ней пространство S изображается в виде квадрата, а различ-

ные множества — в виде плоских фигур, ограниченных замкнутыми линиями. Пример такой диаграммы приведен на рис. 1.1. Видно, что B является подмножеством A, а C — подмножеством B (и одновременно подмножеством A). В дальнейшем мы будем использовать эти диаграммы для определения и объяснения смысла различных операций.

Равенство множеств. Множества A и B равны тогда и только тогда, когда каждый элемент множества A является элементом множества B, и обратно, каждый элемент множества B является элементом множества A. Таким образом, $A = B$ тогда и только тогда, когда $A \subset B$ и $B \subset A$. Диаграмма Эйлера—Венна для этого случая очень проста, и мы не будем ее приводить.

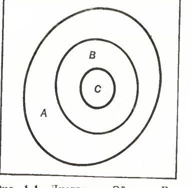


Рис. 1.1. Диаграмма Эйлера—Венна для $C \subset B \subset A$.

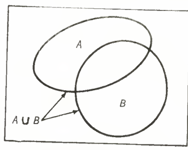


Рис. 1.2. Объединение, или сумма двух множеств, $A \cup B$.

Объединение множеств. *Объединением* или *суммой* двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из данных множеств. Диаграмма Эйлера—Венна для этого случая показана на рис. 1.2. Поскольку предполагается, что выполняется ассоциативный закон, объединение (сумма) более чем двух множеств может записываться без скобок, т. е.

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$

В соответствии с коммутативным законом имеем $A \cup B = B \cup A$, $A \cup A = A, A \cup \varnothing = A, A \cup S = S; A \cup B = A$, если $B \subset A$.

Пересечение множеств. *Пересечением* или *произведением* двух множеств называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат одновременно обоим множествам. Пересечение множеств обозначают $A \cap B$, а соответствующая этому случаю диаграмма Эйлера—Венна показана на рис. 1.3. Из этой диаграммы можно вывести ряд следствий: $A \cap B = B \cap A$ (коммутативный закон), $A \cap A = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap S = A$; $A \cap B = B$, если $B \subset A$.

На рис. 1.4 показана диаграмма для пересечения более чем двух множеств. Видно, что

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C,$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(ассоциативный закон).

Два множества A и B являются *взаимно-исключающими*, или *несовместными*, если $A \cap B = \varnothing$. На диаграмме Эйлера—Венна такие множества не пересекаются.

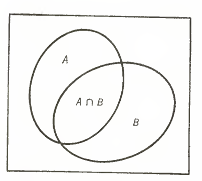


Рис. 1.3. Пересечение, или произведение двух множеств, $A \cap B$.

Рис. 1.4. Пересечение трех множеств, $A \cap B \cap C$.

Дополнение множеств. *Дополнением* множества A называется множество, в котором содержатся все элементы пространства S, кроме принадлежащих A. Оно обозначается через $\overline{A}$ и показано на рис. 1.5. Очевидно, что

$$\overline{\varnothing} = S, \ \overline{S} = \varnothing, \ (\overline{\overline{A}}) = A, \quad A \cup \overline{A} = S, \quad A \cap \overline{A} = \varnothing;$$
$$\overline{A} \subset \overline{B}, \text{ если } B \subset A, \quad \overline{A} = \overline{B}, \text{ если } A = B,$$

Кроме того, существуют два соотношения, называемые *законами де Моргана:*

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Разность множеств. *Разность* $A - B$ множеств A и B есть множество, состоящее из элементов множества A, не принадлежащих множеству B. Соответствующая диаграмма Эйлера—Венна показана на рис. 1.6. Разность множеств может быть записана в виде

$$A - B = A \backslash B = A \cap \overline{B} = A - (A \cap B),$$

Запись $(A - B)$ часто читают как «A без B». Из рассмотрения диаграммы Эйлера—Венна очевидны следующие соотношения:

$$(A - B) \cup B \neq A, \quad (A \cup B) - A = \varnothing, \quad A \cup (A - A) = A,$$
$$A - \varnothing = A, \quad A - S = \varnothing, \quad S - A = \overline{A}.$$

Обратите внимание на то, что в выражениях, где фигурирует разность множеств, нельзя опускать скобки.

Описанные выше преобразования полезно проиллюстрировать конкретным примером. Предположим, что элементами простран-

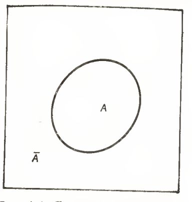


Рис. 1.5. Дополнение множества A.

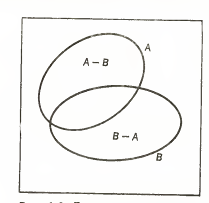


Рис. 1.6. Разность двух множеств.

ства S, как и прежде, являются натуральные числа от 1 до 6, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, и определим следующие подмножества:

$$A = \{2, 4, 6\}, \; B = \{1, 2, 3, 4\}, \; C = \{1, 3, 5\}.$$

Учитывая приведенные соотношения, можно записать:

$$(A \cup B) = \{1, 2, 3, 4, 6\}, \quad (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$
$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S = A \cup C,$$
$$A \cap B = \{2, 4\}, \; B \cap C = \{1, 3\}, \; A \cap C = \varnothing,$$
$$A \cap B \cap C = \varnothing, \; \overline{A} = \{1, 3, 5\} = C, \; \overline{B} = \{5, 6\},$$
$$\overline{C} = \{2, 4, 6\} = A, \; A - B = \{6\}, \; B - A = \{1, 3\},$$
$$A - C = \{2, 4, 6\} = A, \; C - A = \{1, 3, 5\} = C, \; B - C = \{2, 4\},$$
$$C - B = \{5\}, \; (A - B) \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}.$$

Самостоятельно проверьте полученные результаты.

Упражнение 1.5.1. Считая A и B подмножествами одного пространства S, найдите:

а) $(A - B) \cap (B - A)$; б) $(A - \overline{B}) \cap \overline{B}$; в) $(A - B) \cup (A \cap B)$.
Ответы: A, $(A - B)$, $\varnothing$.

Упражнение 1.5.2. Пусть в пространстве $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ имеются два подмножества: $A = \{a, c, e\}$ и $B = \{c, d, e, f\}$. Найдите:

а) $A \cup B$, б) $A \cap B$, в) $(A - B)$, г) $\overline{A} \cap B$, д) $A \cap \overline{B}$, е) $(B - A) \cup A$.
Ответы: $\{a, c, d, e, f\}$, $\{a\}$, $\{d, f\}$, $\{a, c, d, e, f\}$, $\{a\}$, $\{c, e\}$.

1.6. Аксиоматический подход

Попытаемся теперь связать теорию вероятностей с изложенными в предыдущем разделе положениями теории множеств. Такая связь устанавливается путем введения *вероятностного пространства*, элементы которого составляют всю совокупность исходов (множество возможных исходов опыта). Например, если в опыте с игральной костью в качестве возможных исходов рассматривать случаи выпадения каждой из шести граней кубика, то соответствующим вероятностным пространством будет множество $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Различные подмножества этого пространства могут быть идентифицированы как *случайные события*. Примем, что в рассматриваемой ситуации случайное событие $\{2\}$ соответствует выпадению грани 2, $\{1, 2, 3\}$ — выпадению одной из граней 1, 2 или 3. Поскольку каждый опыт должен иметь по крайней мере хотя бы один исход, все вероятностное пространство S соответствует *достоверному событию*, а пустое множество $\varnothing$ *невозможному событию*. Любое событие, состоящее из одного элемента, называется *элементарным*.

Следующий шаг заключается в сопоставлении каждому событию числа, называемого, как и прежде, его *вероятностью*. Если случайное событие обозначить через A, то его вероятность равна $\mathrm{P}(A)$. Вероятность выбирают так, чтобы она удовлетворяла трем следующим условиям, или аксиомам:

$$\mathrm{P}(A) \geqslant 0, \tag{1.9}$$

$$\mathrm{P}(S) = 1, \tag{1.10}$$

$$\text{если } A \cap B = \varnothing, \text{ то } \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B). \tag{1.11}$$

Вся теория вероятностей строится на этих трех аксиомах. Необходимо, однако, еще раз подчеркнуть, что исходные аксиомы постулируются и попытка доказать их лишена смысла. Единственным возможным критерием справедливости этих аксиом является степень, с которой теория, построенная на их основе, отражает реальный мир. Этот критерий справедлив и в отношении любой другой естественно-научной теории.

Из принятых аксиом можно вывести целый ряд следствий, и некоторые из них будут сейчас получены. Во-первых, поскольку $S \cap \varnothing = \varnothing$ и $S \cup \varnothing = S$, из (1.11) следует, что

$$\mathrm{P}(S \cup \varnothing) = \mathrm{P}(S) = \mathrm{P}(S) + \mathrm{P}(\varnothing).$$

Поэтому

$$P(\varnothing) = 0. \quad (1.12)$$

Во-вторых, поскольку $A \cap \overline{A} = \varnothing$ и $A \cup \overline{A} = S$, из (1.10) и (1.11) следует

$$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = P(S) = 1. \quad (1.13)$$

Отсюда получаем

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) \leqslant 1. \quad (1.14)$$

Таким образом, вероятность события представляет собой число, заключенное в пределах от 0 до 1.

Если события A и B не являются несовместными, то вообще говоря постулат (1.11) не может выполняться. Можно, однако, получить более общее выражение. Из приведенной на рис. 1.3 диаграммы Эйлера—Венна следует, что

$$A \cup B = A \cup (\overline{A} \cap B)$$

и что множества A и $\overline{A} \cap B$ являются непересекающимися. Следовательно, из (1.11) вытекает соотношение

$$P(A \cup B) = P(A \cup \overline{A} \cap B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B).$$

Из этой диаграммы также ясно, что $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$, а множества $A \cap B$ и $\overline{A} \cap B$ взаимно-исключающие. В соответствии с этим имеем

$$P(B) = P((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B). \quad (1.15)$$

Исключая из (1.15) член $P(\overline{A} \cap B)$, получим

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leqslant P(A) + P(B), \quad (1.16)$$

и приходим к искомому следствию.

Теперь, после того как теоретические соотношения аксиоматического подхода получены, обратимся к задаче построения вероятностных пространств. Сначала рассмотрим пример с бросанием одной игральной кости и связанного с этим опытом вероятностного пространства $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Элементарными событиями являются выпадения целых чисел, нанесенных на обращенную вверх грань, и понятно, что они взаимно исключают друг друга. Если предположить равновозможность этих событий, то вероятность каждого из них

$$P\{\alpha_i\} = 1/6, \ \alpha_i = 1, 2, \ldots, 6.$$

Обратите внимание, что принятое предположение может считаться истинным при относительно-частотном подходе, но в рамках аксиоматического подхода оно остается только предположением, поскольку можно исходить из любых других.

Рассмотрим событие $A = \{1, 3\} = \{1\} \cup \{3\}$, принадлежащее тому же вероятностному пространству. Из (1.11) имеем

$$P(A) = P(1) + P(3) = 1/6 + 1/6 = 1/3.$$

Полученное значение можно трактовать как вероятность выпадения чисел либо 1, либо 3. Несколько более сложная ситуация возникает, когда $A = \{1, 3\}$, $B = \{3, 5\}$ и нужно найти $P(A \cup B)$. Поскольку события A и B не являются несовместными, можно использовать выражение (1.16). Выше было показано, что $P(A) = P(B) = 1/3$. Однако, так как $A \cap B = \{3\}$, т. е. является элементарным событием, его вероятность $P(A \cap B) = 1/6$. Следовательно, из (1.16) имеем

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1/3 + 1/3 - 1/6 = 1/2.$$

Другой возможный подход может быть использован, если отметить, что $A \cup B = \{1, 3, 5\}$ состоит из трех несовместных элементарных событий. Дважды воспользовавшись (1.11), сразу получим

$$P(A \cup B) = P\{1\} + P\{3\} + P\{5\} = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2.$$

Обратите внимание, что полученное значение можно считать вероятностью того, что либо произойдет событие A или B, либо оба они вместе.

Упражнение 1.6.1. Додекаэдр представляет собой геометрическое тело с 12 гранями; часто на грани кости такой формы наносят обозначения месяцев года. Будем считать исходом опыта с такой костью выпадение месяца на грани, обращенной вверх. Кроме того, пусть $A = \{\text{Январь}\}$, $B = \{\text{Любой месяц продолжительностью 30 дней}\}$, а $C = \{\text{Любой месяц продолжительностью 31 день}\}$. Найдите: а) $P(A \cup C)$; б) $P(A \cap C)$; в) $P(B \cup C)$; г) $P(A \cap B)$.

Ответы: 11/12, 0, 1/12, 7/12.

Упражнение 1.6.2. Нарисуйте диаграмму Эйлера—Венна с тремя подмножествами, не являющимися взаимно-исключающими. С помощью этой диаграммы найдите выражение для $P(A \cup B \cup C)$.

Ответ: $P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

1.7. Условная вероятность

Понятие условной вероятности было введено в разд. 1.4 исходя из представления об относительной частоте одного события, если оговорено, что другое уже произошло. В рамках аксиоматического подхода такая вероятность — это некоторым образом определенная величина. Если полагать вероятность события B отличной от нуля, то условная вероятность события A при условии, что событие B произошло, определяется как

$$P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B), \quad P(B) > 0, \tag{1.17}$$

где $P(A \cap B)$ — вероятность события $A \cap B$.

Выше (разд. 1.4) выражение, стоящее в числителе (1.17), записывалось в виде $P(A, B)$ и называлось совместной вероятностью событий A и B. Такая интерпретация по-прежнему верна, если A и B — элементарные события, но в более общем случае правильное представление должно опираться на определение пересечения множеств, $A \cap B$. Очевидно, если A и B — непересекающиеся множества, то множество $A \cap B$ — пустое и $P(A \cap B) = 0$. С другой стороны, если $A \subset B$, то $A \cap B = A$ и $P(A|B) = P(A)/P(B) \geqslant P(A)$. Наконец, если $B \subset A$, то $A \cap B = B$ и $P(A|B) = P(B)/P(B) = 1$. Однако в общем случае, если A не принадлежит B и B не принадлежит A, о величинах $P(A)$ и $P(A|B)$ нельзя ничего сказать.

До сих пор еще не было показано, что условные вероятности удовлетворяют принятым аксиомам (1.9)—(1.11). В рамках относительно-частотного подхода это действительно вероятности, поскольку они могут быть определены как отношения числа благоприятных исходов к общему числу опытов, однако при аксиоматическом подходе условные вероятности — это величины, вводимые по определению; следовательно, необходимо отдельно проверить, соответствуют ли они требованиям, предъявляемым к понятию «вероятность».

Первая аксиома есть $P(A|B) \geqslant 0$, и из выражения (1.17) очевидна ее справедливость, поскольку и числитель и знаменатель дроби последнего — положительные величины. Вторая аксиома имеет вид $P(S|B) = 1$, и ее справедливость также очевидна, поскольку $B \subset S$, а значит, $S \cap B = B$ и $P(S \cap B) = P(B)$. Для проверки справедливости последней, третьей аксиомы рассмотрим событие C, такое, что $A \cap C = \varnothing$ (т. е. множества A и C не пересекаются). В этом случае

$$P((A \cup C) \cap B)) = P((A \cap B) \cup (C \cap B)) = P(A \cap B) + P(C \cap B),$$

поскольку $(A \cap B)$ и $(C \cap B)$ также непересекающиеся множества и для них выполняется соотношение (1.11). Следовательно, из (1.17) получаем

$$P((A \cup C)|B) = P((A \cup C) \cap B)/P(B) =$$
$$= [P(A \cap B)/P(B)] + [P(C \cap B)/P(B)] = P(A|B) + P(C|B).$$

Таким образом доказано, что выполняются требования и третьей аксиомы и, следовательно, условные вероятности — это вероятности в полном смысле.

Прежде чем переходить к дальнейшему рассмотрению условной вероятности, полезно проанализировать случай, когда события не являются элементарными. Пусть опыт заключается в бросании одной кости, а его исходы — в выпадении целых чисел 1, 2, 3, ..., 6. Определим событие $A = \{1, 2\}$, т. е. выпадение

цифры 1 или цифры 2. Из предыдущего рассмотрения известно, что $\mathrm{P}(A) = 1/6 + 1/6 = 1/3$. Определим B как событие, заключающееся в выпадении четного очка, т. е. $B = \{2, 4, 6\}$, а $\mathrm{P}(B) = 1/2$, поскольку оно состоит из трех элементарных событий. Далее, $A \cap B = \{2\}$, откуда $\mathrm{P}(A \cap B) = 1/6$. Условную вероятность, $\mathrm{P}(A \mid B)$, теперь можно записать как

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A \cap B)/\mathrm{P}(B) = (1/6)/(1/2) = 1/3.$$

Из полученного результата следует, что условная вероятность выпадения в опыте 1 или 2 при условии, что произошло B, т. е. выпало четное очко, равна 1/3. С другой стороны, условная вероятность выпадения четного очка при условии, что выпали цифры 1 или 2, равна

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \mathrm{P}(A \cap B)/\mathrm{P}(A) = (1/6)/(1/3) = 1/2.$$

Результат этот является очевидным.

Одно из применений условной вероятности заключается в нахождении *полной вероятности*. Пусть имеется n несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и произвольное событие B, показанные на диаграмме Эйлера—Венна (рис. 1.7). События охватывают все пространство S, так что

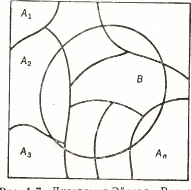


Рис. 1.7. Диаграмма Эйлера—Венна для полной вероятности.

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S. \tag{1.18}$$

Поскольку события A_i и A_j $(i \neq j)$ несовместны, $B \cap A_i$ и $B \cap A_j$ также несовместны. Далее, с учетом (1.18) запишем

$$B = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n).$$

Следовательно, из (1.11)

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B \cap A_1) + \mathrm{P}(B \cap A_2) + \cdots + \mathrm{P}(B \cap A_n). \tag{1.19}$$

Но из (1.17)

$$\mathrm{P}(B \cap A_i) = \mathrm{P}(B \mid A_i)\,\mathrm{P}(A_i).$$

Подстановка в (1.19) дает

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B \mid A_1)\,\mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(B \mid A_2)\,\mathrm{P}(A_2) + \cdots + \mathrm{P}(B \mid A_n)\,\mathrm{P}(A_n). \tag{1.20}$$

Величина P (*B*) — это *полная вероятность*, а выражение (1.20) — ее представление в виде суммы различных условных вероятностей.

Приведем пример, который поможет уяснить, каким образом применяется понятие полной вероятности. Пусть имеется вертушка, на которой закреплено шесть коробок. В каждой из них содержится набор резисторов (табл. 1.3). Если случайным образом [1]) из произвольной коробки взять один резистор, то какова вероятность того, что его номинальное сопротивление будет равняться 10 Ом? Событиям A_i, фигурирующим в (1.20), можно поставить в соответствие выбор той или иной коробки, так что

Таблица 1.3

Наборы резисторов с различными номинальными сопротивлениями

Номинальное сопротивление резисторов	Наборы резисторов в коробках с номерами:						Всего резисторов данного номинала
	1	2	3	4	5	6	
10 Ом	500	0	200	800	1200	1000	3700
100 Ом	300	400	600	200	800	0	2300
1000 Ом	200	600	200	600	0	1000	2600
Итого:	1000	1000	1000	1600	2000	2000	8600

$$P(A_i) = 1/6, \ i = 1, 2, \dots, 6,$$

поскольку мы предположили, что обращение к любой коробке возможно с одинаковой вероятностью. Пусть событие B состоит в извлечении 10-омного резистора. Очевидно, что его условные вероятности определяются количествами таких резисторов в каждой из коробок. Таким образом,

$$P(B \mid A_1) = 500/1000 = 1/2, \qquad P(B \mid A_2) = 0/1000 = 0,$$

$$P(B \mid A_3) = 200/1000 = 2/10, \quad P(B \mid A_4) = 800/1600 = 1/2,$$

$$P(B \mid A_5) = 1200/2000 = 6/10, \quad P(B \mid A_6) = 1000/2000 = 1/2.$$

[1]) Выражения «случайным образом» или «наугад» обычно означают «с равной вероятностью».

Следовательно, найденная по формуле (1.20) полная вероятность извлечения 10-омного резистора будет равна

$$\mathrm{P}(B) = (1/2)(1/6) + 0(1/6) +$$
$$+ (2/10)(1/6) + (1/2)(1/6) + (6/10)(1/6) +$$
$$+ (1/2)(1/6) = 0{,}3833.$$

Нужно заметить, что выше при определении условных вероятностей были использованы понятия относительной частоты и равновозможности событий, однако основное выражение (1.20) получено в рамках аксиоматического подхода.

Величины $\mathrm{P}(A_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ в (1.20) обычно называют *априорными вероятностями*, поскольку с их помощью оценивается вероятность события A_i до выполнения опыта. После же того как опыт произведен и установлено, что событие B произошло, событиям A_i ставятся в соответствие *условные вероятности* $\mathrm{P}(A_i \mid B)$. Для их определения перепишем (1.17) в виде

$$\mathrm{P}(A_i \cap B) = \mathrm{P}(A_i \mid B)\,\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B \mid A_i)\,\mathrm{P}(A_i).$$

Последнее равенство в этом соотношении обусловлено тем, что события A_i и B можно просто поменять ролями. Отсюда получаем

$$\mathrm{P}(A_i \mid B) = \mathrm{P}(B \mid A_i)\,\mathrm{P}(A_i)/\mathrm{P}(B), \quad \mathrm{P}(B) \neq 0, \tag{1.21}$$

и, подставляя (1.20), находим

$$\mathrm{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathrm{P}(B \mid A_i)\,\mathrm{P}(A_i)}{\mathrm{P}(B \mid A_1)\,\mathrm{P}(A_1) + \cdots + \mathrm{P}(B \mid A_n)\,\mathrm{P}(A_n)}. \tag{1.22}$$

Условную вероятность $\mathrm{P}(A_i \mid B)$ часто называют *апостериорной*, поскольку она распространяется на ситуации, возникшие после окончания опыта, а выражения (1.21) или (1.22) называются *формулами Байеса*.

Понятие *апостериорной вероятности* можно проиллюстрировать, продолжив рассмотрение нашего примера. Предположим, что извлеченный из какой-либо коробки резистор оказался 10-омным. Какова вероятность того, что он был взят из коробки № 3? Поскольку событие B по-прежнему состоит в извлечении 10-омного резистора, условные вероятности $\mathrm{P}(B \mid A_i)$ остаются теми же. Кроме того, априорные вероятности по-прежнему равны 1/6. Поэтому из (1.21) с учетом найденного выше значения $\mathrm{P}(B)$ получим

$$\mathrm{P}(A_3 \mid B) = (2/10)(1/6)/0{,}3833 = 0{,}0869.$$

Это и есть вероятность того, что извлеченный наугад 10-омный резистор был взят из коробки № 3.

Упражнение 1.7.1. Используя приведенные в табл. 1.3 данные, определите вероятность того, что

а) извлеченный 1000-омный резистор был взят из коробки № 3;
б) извлеченный 10-омный резистор был взят из коробки № 5.
Ответы: 0,1067, 0,2609.

Упражнение 1.7.2. Изготовитель электронного оборудования закупил партии в 1000, 2000 и 3000 интегральных схем у поставщиков A, B и C соответственно. При проведении входного контроля выявилось, что условные вероятности отказов этих микросхем во время прогона составляют

$$\mathrm{P}\,(\text{отказ} \mid A) = 0{,}1, \ \mathrm{P}\,(\text{отказ} \mid B) = 0{,}05, \ \mathrm{P}\,(\text{отказ} \mid C) = 0{,}08.$$

Все микросхемы смешивают и наугад берут одну из них. Какова вероятность того, что

а) выбранная микросхема откажет во время прогона?
б) отказавшая микросхема поступила от поставщика A?
Ответы: 0,0733, 0,2273.

1.8. Статистическая независимость

В теории вероятностей особое значение имеет понятие статистической независимости. Оно было введено выше, когда при рассмотрении в рамках относительно-частотного подхода двух опытов с подбрасыванием монет выяснилось, что исход второго из них не зависит от результата первого. Теперь, когда мы располагаем более общей формулировкой случайного события, это понятие можно развить, однако основное определение статистической независимости остается справедливым. Напомним его.

События A и B статистически независимы тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{P}\,(A \cap B) = \mathrm{P}\,(A)\,\mathrm{P}\,(B). \tag{1.23}$$

На практике события часто считают независимыми, потому что не находят очевидного физического механизма, при помощи которого осуществлялась бы связь между ними. В других случаях принятые значения вероятностей элементарных событий ведут к независимости определенных с помощью них событий. В таких ситуациях статистическая независимость может быть неявной, однако выражение (1.23) позволяет установить ее наличие.

Понятие статистической независимости можно распространить на случай трех и более событий. К примеру, для трех событий условия независимости записываются в виде

$$\mathrm{P}\,(A_1 \cap A_2) = \mathrm{P}\,(A_1)\,\mathrm{P}\,(A_2),$$

$$\mathrm{P}\,(A_1 \cap A_3) = \mathrm{P}\,(A_1)\,\mathrm{P}\,(A_3),$$

$$\mathrm{P}\,(A_2 \cap A_3) = \mathrm{P}\,(A_2)\,\mathrm{P}\,(A_3),$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) P(A_2) P(A_3).$$

Обратите внимание на то, что должны удовлетворяться все четыре условия и что их попарной независимости для независимости всех событий из данного набора недостаточно. В общем случае если имеется n событий, то для их статистической независимости необходимым и достаточным является выполнение условия

$$P(A_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_k) = P(A_i) P(A_j) \ldots P(A_k) \qquad (1.24)$$

для каждого набора целых чисел, меньших или равных n. Поэтому для установления независимости n событий нужно иметь $2^n - (n + 1)$ выражений вида (1.24).

Одним из важных следствий независимости двух событий A и B является преобразование выражения (1.16)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

к виду

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) P(B). \qquad (1.25)$$

Еще одно следствие для трех независимых событий A_1, A_2 и A_3 имеет вид

$$P(A_1 \cap (A_2 \cup A_3)) = P(A_1) P(A_2 \cup A_3). \qquad (1.26)$$

Если же эти события независимы только попарно, то (1.26) не будет справедливым. В общем если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — независимые события, то ни одно из них не зависит от объединений, пересечений и дополнений других.

Практическими примерами, иллюстрирующими понятие статистической независимости, чаще всего служат опыты, приводящие к двум или большему числу событий. Для иллюстрации рассмотрим пример одного опыта и связанной с ним пары событий. Пусть этот опыт заключается в бросании двух игральных костей; определим для него события A и B как сумму очков 7 и 11 соответственно. Являются ли эти события независимыми? Нет, не являются, поскольку одно событие исключает другое, а несовместные события не могут быть статистически независимыми.

В качестве второго примера рассмотрим два события, которые нельзя считать несовместными. Для того же случая бросания пары игральных костей определим события A = {выпадение нечетной суммы очков} и B = {выпадение суммы очков 11}. Событие $A \cap B = B$, поскольку B = подмножество A. Следовательно, $P(A \cap B) = P(B) = P(11) = 2/36 = 1/18$, так как число 11 может быть получено двумя способами (как $5 + 6$ или $6 + 5$). Кроме того, $P(A) = 1/2$, так как нечетное число выпа-

дает в половине всех исходов. Отсюда следует, что

$$P(A \cap B) = 1/18 \neq P(A)\,P(B) = (1/2)\,(1/18) = 1/36.$$

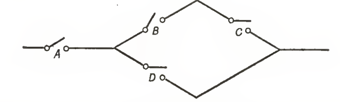
Таким образом, события A и B не являются статистически независимыми. Это очевидно, поскольку если событие B произошло, то должно произойти и событие A, хотя обратное утверждение неверно.

Статистическую независимость случайных событий того или иного опыта можно определить и в тех случаях, когда из логического анализа возможных наборов событий данный вывод непосредственно не следует. Например, определим для бросания одной кости два события: $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{3, 4\}$. Из предыдущих результатов ясно, что $P(A) = 1/2$, а $P(B) = 1/3$. Событию $(A \cap B)$ соответствует один элемент $\{3\}$, а поэтому $P(A \cap B) = 1/6$. Отсюда следует, что

$$P(A \cap B) = 1/6 = P(A)\,P(B) = (1/2)\,(1/3) = 1/6$$

и события A и B независимы, хотя физический смысл этого вывода интуитивно понять и не удается. В следующем разделе рассматриваются ситуации, в которых фигурируют два или более опытов, а также случаи, в которых в ходе единственного опыта проводится более одного испытания, и проводимое в этом разделе обсуждение поможет прояснить суть дела.

Упражнение 1.8.1. Из обычной колоды в 52 карты наугад берут одну. Пусть событие A = {извлечение туза}, B = {извлечение карты масти «пики»}. Являются ли эти события статистически независимыми? Обоснуйте ответ.
Ответ: Да, события A и B статистически независимы.



Упражнение 1.8.2. Пусть переключатели A, B, C и D в показанной коммутирующей схеме срабатывают случайным образом и независимо друг от друга. Найдите вероятность протекания тока I через схему, если вероятность замкнутого состояния каждого переключателя равна 0,2.
Ответ: 0,0464.

1.9. Совместные опыты

Выше вероятностное пространство S связывалось с результатами одного опыта. Такая концепция слишком ограниченна и не позволяет рассматривать многие практические случаи, поэтому нужно ее обобщить. Рассмотрим ситуацию, связанную с выпол-

нением пары опытов. Пусть, например, один из них заключается в бросании игральной кости, а другой — в подбрасывании монеты, и необходимо найти вероятность выпадения, скажем, цифры 3 на игральной кости и герба на монете. В других случаях вторым опытом может быть просто выполнение еще одного испытания. Оба эксперимента, рассматриваемые в совокупности, образуют *совместный опыт*, для которого теперь необходимо определить вероятностное пространство.

Пусть одному из опытов отвечает пространство элементарных событий S_1, а другому S_2. Обозначим элементы первого как $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, а второго как $S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$. Затем образуем новое пространство, называемое *декартовым произведением*, элементы которого представляют собой всю совокупность упорядоченных пар (α_1, β_1), (α_1, β_2), ..., (α_i, β_j), ..., (α_n, β_m). Таким образом, если множества S_1 и S_2 включают соответственно n и m элементов, то новое пространство включает mn элементов. Декартово произведение записывается в виде $S = S_1 \times S_2$, что дает возможность отличать его от определенного в разд. 1.5 пересечения (или произведения) множеств.

Чтобы проиллюстрировать применение декартова произведения в случае совместных опытов, вернемся к обсуждавшемуся выше примеру с бросанием кости и монеты. Пространство, соответствующее опыту с костью, можно записать как $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, а опыту с монетой, — как $S_2 = \{\text{решетка, герб}\}$.

Таким образом, декартово произведение включает 12 элементов и записывается в виде

$$S = S_1 \times S_2 = \{(1, \text{решетка}), (1, \text{герб}), (2, \text{решетка}), (2, \text{герб}), (3, \text{решетка}), (3, \text{герб}), (4, \text{решетка})\}. (4, \text{герб}), (5, \text{решетка}), (5, \text{герб}), (6, \text{решетка}), (6, \text{герб}).$$

Теперь необходимо определить события в новом вероятностном пространстве. Если A_1 и A_2 — рассматриваемые в качестве событий подмножества пространств S_1 и S_2 соответственно, то $A = A_1 \times A_2$ — событие пространства S. В частности, пусть в описанном выше примере $A_1 = \{1, 3, 5\}$, а $A_2 = \{\text{решетка}\}$. Отвечающее такому случаю событие A записывается в виде $A = A_1 \times A_2 = \{(1, \text{решетка}), (3, \text{решетка}), (5, \text{решетка})\}$.

Чтобы найти вероятность события A, необходимо установить, являются ли оба опыта независимыми — мы будем рассматривать только такие ситуации. Для них вероятность события, выраженного декартовым произведением, будет равна произведению вероятностей событий в исходных пространствах. Таким образом, если $\mathrm{P}(A_1)$ и $\mathrm{P}(A_2)$ — вероятности события A_1 в пространстве S_1 и события A_2 в пространстве S_2, то вероятность события A в пространстве S будет

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_1 \times A_2) = \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2). \quad (1.27)$$

Полученный результат можно численно проиллюстрировать с помощью нашего примера. Из полученных выше результатов следует, что для $A_1 = \{1, 3, 5\}$ вероятность $P(A_1) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$, а для $A_2 = \{\text{решетка}\}$ имеем $P(A_2) = 1/2$. Таким образом, вероятность одновременного выпадения нечетного очка на кости и решетки составляет $P(A) = (1/2)\cdot(1/2) = 1/4$.

Изложенные соображения можно достаточно просто обобщить и распространить на ситуации, где фигурирует более двух опытов. Однако в последующем мы ограничимся лишь случаем произвольного числа повторений (испытаний) одного и того же опыта.

Упражнение 1.9.1. Совместный опыт заключается в бросании игральной кости, на грани которой нанесены цифры от 1 до 6, и детского кубика с буквами от A до F.

а) Напишите все элементы, входящие в декартово произведение соответствующих пространств.

б) Пусть K — событие, заключающееся в выпадении на игральной кости четного очка, а на кубике — букв B или C. Найдите его вероятность.

Ответ: 1/6.

Упражнение 1.9.2. Совместный опыт заключается в трехкратном бросании монеты.

а) Перечислите все элементы декартова произведения Р (решетка) РР, РГ (герб) Р, ГГР и т. д.

Найдите вероятность того, что

б) решетка выпадет два раза;

в) решетка выпадет более одного раза.

Ответы: 1/2, 3/8.

1.10. Схема Бернулли

Здесь мы рассмотрим ситуацию, в которой один и тот же опыт выполняется n раз и нужно найти вероятность того, что какое-то событие случится точно k раз. Примером может служить определение вероятности четырехкратного выпадения решетки при десятикратном подбрасывании монеты. Серия опытов такого типа носит название *схемы Бернулли*.

Пусть в некотором опыте вероятность события A равна $P(A) = p$. Тогда вероятность того, что оно не произойдет $P(\bar{A}) = q$, причем $p + q = 1$ [2]). Выполним этот опыт n раз, предположив, что отдельные испытания независимы, а значит, исход любого из них никак не связан с исходами предыдущих (или последующих) испытаний. Далее, найдем вероятность появления события A точно k раз в определенной последовательности, скажем только в первых k испытаниях. Поскольку опыты независимы, искомая вероятность будет записываться следующим образом:

$$\underbrace{P(A)P(A)\ldots P(A)}_{k \text{ из } n}\ \underbrace{P(\bar{A})P(\bar{A})\ldots P(\bar{A})}_{(n-k) \text{ из } n} = p^k q^{n-k}.$$

[2]) Обозначения p и q приняты здесь потому, что они применяются в большинстве источников при рассмотрении схемы Бернулли.

Однако имеются много других вариантов реализации последовательности k событий, поскольку они могут происходить в любом порядке. К тому же вследствие их независимости вероятность k событий будет всегда той же, что и записанная. Отсюда событие, заключающееся в том, что событие A произойдет k раз в любом порядке, представляет собой сумму несовместных событий, состоящих в том, что A произошло k раз в определенном порядке, а поэтому вероятность первого события будет равняться просто произведению $p^k q^{n-k}$, умноженному на число различных возможных вариантов следования событий A.

Здесь необходимо отвлечься от темы и обратиться к комбинаторике, с помощью которой можно определить число различных вариантов появления события A в n опытах точно k раз. Очевидно, в случае формирования последовательности длиной n первое событие A может занять любое из n мест, второе — любое из оставшихся $(n-1)$ мест и т. д., так что для k-го события A останется $(n-k+1)$ мест. Таким образом, полное число различных последовательностей длиной n, содержащих точно k событий A, равно произведению числа различных возможностей. И окончательно, поскольку $k!$ порядков следования k событий будут идентичны, искомое число запишется как

$$(1/k!)\,[n(n-1)(n-2)\ \dots\ (n-k+1)] = (n!)/k!\,(n-k)!. \qquad (1.28)$$

Правая часть (1.28) — обычный *биномиальный коэффициент*, часто обозначаемый C_n^k или $\binom{n}{k}$[3]. В этой книге будет использоваться последнее обозначение.

Найдем, к примеру, биномиальный коэффициент для $n = 4$ и $k = 2$:

$$\binom{n}{k} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6,$$

и существует шесть различных последовательностей, в которых событие A случается ровно 2 раза. Их можно записать в виде $AA\bar{A}\bar{A}$, $A\bar{A}A\bar{A}$, $A\bar{A}\bar{A}A$, $\bar{A}AA\bar{A}$, $\bar{A}A\bar{A}A$, $\bar{A}\bar{A}AA$. Теперь искомая вероятность того, что событие A произойдет k раз, находится как

$$p_n(k) = \mathrm{P}\{A \text{ произошло } k \text{ раз}\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}. \qquad (1.29)$$

Чтобы проиллюстрировать возможности применения полученного результата, обратимся к примеру ЭВМ, в которой двоичные числа 0 и 1 организованы в 32-разрядные слова. Какова вероятность однократной ошибки при чтении слова, если вероят-

[3]) Значения этих коэффициентов приведены в приложении В.

ность ошибки при чтении двоичной цифры составляет 10^{-3}? В рассматриваемом случае $n = 32$, $k = 1$, $p = 10^{-3}$. Следовательно,

$$P\{\text{Одна ошибка в слове}\} = p_{32}(1) = \binom{32}{1}(10^{-3})^1(0{,}999)^{31} =$$

$$= 32\,(0{,}999)^{31}(10^{-3}) \approx 0{,}031.$$

Выражение (1.29) может использоваться также для нахождения вероятности отсутствия в слове ошибок. В такой ситуации $k = 0$, $\binom{n}{0} = 1$ и

$$P\{\text{Отсутствие ошибок в слове}\} = p_{32}(0) =$$
$$= \binom{32}{0}(10^{-3})^0(0{,}999)^{32} = (0{,}999)^{32} \approx 0{,}9685.$$

Есть множество других практических приложений схемы Бернулли. Например, в системе, состоящей из n элементов, вероятность отказа каждого из которых равна p, вероятность того, что из строя выйдет только один элемент, равна

$$P\{\text{Неисправен один элемент}\} = p_n(1) = \binom{n}{1} pq^{(n-1)}.$$

Иногда может представлять интерес определение вероятностей того, что некоторое событие произойдет по меньшей мере k раз или не более k раз. Эти вероятности можно найти, сложив вероятности всех исходов, которые составляют рассматриваемое событие. Например, найдем вероятность двукратного как минимум выпадения решетки при четырехкратном подбрасывании монеты. Для такого опыта $p = q = 1/2$, а $n = 4$. Из (1.29) получаем, что вероятность события, заключающегося в двукратном выпадении решетки равна

$$p_4(2) = \binom{4}{2}(1/2)^2(1/2)^2 = 6\,(1/4)(1/4) = 3/8.$$

Аналогично, вероятность трехкратного выпадения равна

$$p_4(3) = \binom{4}{3}(1/2)^3(1/2)^1 = 4\,(1/8)(1/2) = 1/4,$$

а четырехкратного выпадения

$$p(4) = \binom{4}{4}(1/2)^4(1/2)^0 = 1\,(1/16)\,1 = 1/16.$$

Следовательно, искомая вероятность будет равна

$$P\{\text{Выпадение решетки не менее 2 раз}\} =$$
$$= p_4(2) + p_4(3) + p_4(4) = 3/8 + 1/4 + 1/16 = 11/16.$$

Для задач такого типа легко получить общие выражения, но при этом возникает несколько различных ситуаций. Приведем для них соответствующие выражения:

$$P\{\text{Событие } A \text{ произойдет в } n \text{ опытах менее } k \text{ раз}\} = \sum_{i=0}^{k-1} p_n(i),$$

$$P\{\text{Событие } A \text{ произойдет в } n \text{ опытах более } k \text{ раз}\} = \sum_{i=k+1}^{n} p_n(i),$$

$$P\{\text{Событие } A \text{ произойдет в } n \text{ опытах не более } k \text{ раз}\} = \sum_{i=0}^{k} p_n(i),$$

$$P\{\text{Событие } A \text{ произойдет в } n \text{ опытах не менее } k \text{ раз}\} = \sum_{i=k}^{n} p_n(i).$$

В заключение дадим оценку вероятностей $p_n(k)$ при больших k. Поскольку вычисление биноминальных коэффициентов и возведение в большие степени p и q в таких случаях связано со значительными трудностями, часто приходится искать хотя и приближенные, но зато упрощенные способы выполнения расчетов. Одно такое приближение, называемое *теоремой Муавра—Лапласа*, используется, если $npq \gg 1$, а $|k - np| \lesssim (npq)^{1/2}$. Соответствующее выражение записывается следующим образом:

$$p_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx (2\pi npq)^{-1/2} \exp\{-(k-np)^2/2npq\}. \quad (1.30)$$

Дополнительное значение этой теоремы станет ясным при рассмотрении в следующей главе понятия непрерывной случайной величины. Пока же стоит привести простой пример, иллюстрирующий применение этой теоремы в случае дискретного множества исходов опытов. Пусть монету подбрасывают 100 раз и хотят определить вероятность выпадения решетки k раз (пусть $k = 50$). Поскольку $p = q = 1/2$, $n = 100$, из (1.30) получим

$$p_n(k) \approx (50\pi)^{-1/2} \exp\{-(k-50)^2/50\}$$

для k от 40 до 60. Ясно, что вычисления с помощью последней формулы выполнить много проще, чем искать биномиальный коэффициент $\binom{100}{k}$ для такого k.

Упражнеиие 1.10.1. Пару игральных костей бросают 8 раз.
а) Найдите вероятность выпадения числа 7 точно 4 раза.
б) Найдите вероятность выпадения в двух испытаниях суммы очков 11.
в) Найдите вероятность того, что сумма очков 12 выпадет более одного раза.
Указание: Вычтите из единицы вероятность события {сумма очков 12 выпадает 1 раз или вовсе не выпадает}.
Ответы: 0,0613, 0,0193, 0,02605.

Упражнеиие 1.10.2. Из одной ЭВМ в другую необходимо переслать файл объемом 8000 символов. Вероятность ошибки при передаче символа составляет 0,001.

а) Определите вероятность безошибочной передачи файла.

б) Используя теорему Муавра—Лапласа, вычислите вероятность того, что в переданном файле окажется ровно 10 ошибок.

в) Определите, какова должна быть вероятность ошибки при передаче одного символа, чтобы вероятность передачи всего файла без ошибок составляла 0,99.

Ответы: $3{,}341 \cdot 10^{-4}$, 0,1099, $1{,}256 \cdot 10^{-6}$.

ЗАДАЧИ

Первые две цифры номера каждой задачи совпадают с номером раздела, в котором рассматривается соответствующий материал.

1.1.1. Между выходными клеммами шестиэлементного аккумулятора с номинальным напряжением 12 В последовательно с амперметром включен резистор, на котором указано номинальное сопротивление 6 Ом.

а) Перечислите все параметры этой цепи, которые могут считаться случайными.

б) Найдите диапазон показаний амперметра, если напряжение аккумулятора может принимать любое значение между 10,5 и 12,5 В, реальное сопротивление резистора может отклоняться от номинального на $\pm 5\%$, а точность показаний прибора составляет 2%. Сопротивление обмотки последнего не учитывайте.

в) Перечислите для этой цепи все параметры, которые нельзя считать случайными.

1.1.2. При определении статистических характеристик текстов на русском языке обычно считают, что алфавит состоит из 32 букв, а промежутки между словами рассматривают как печатный знак. Знаки препинания, как правило, при этом не учитывают.

а) Подсчитайте, сколько раз каждый из символов встречается в тексте настоящей задачи.

б) На основе полученных данных определите, какие два символа имеют наибольшие вероятности появления в текстах, а какой (или какие) — наименьшую.

1.2.1. Перечислите все возможные исходы и укажите, являются ли они равновозможными для следующих случайных опытов:

а) подбрасывание двух монет;

б) рассмотрение последней цифры телефонного номера, взятого наугад из справочника,

в) рассмотрение суммы двух последних цифр телефонного номера, взятого наугад из справочника.

1.2.2. Укажите, являются ли элементарными перечисленные ниже события:

а) выпадение суммы очков 7 при бросании двух игральных костей,

б) выпадение двух решеток в опыте с тремя монетами,

в) вытаскивание туза при случайном выборе карты из колоды,

г) вытаскивание двойки пик при случайном выборе из колоды,

д) выпадение суммы очков 2 при бросании пары игральных костей,

е) выпадение трех решеток при бросании трех монет,

ж) наличие в отрывке текста 16 букв «е».

1.4.1. Определите для опыта с игральной костью вероятности наступления следующих событий:

а) выпадения цифры 5,

б) выпадения числа, большего 3,

в) выпадения четного числа.

1.4.2. Определите для опыта с бросанием пары игральных костей вероятности следующих событий:

а) выпадения суммы очков 11,

б) выпадения суммы очков меньше 5,

в) выпадения четной суммы очков.

1.4.3. В коробке с немаркированными цифровыми микросхемами лежит

200 шестиэлементных инверторов, 100 схем совпадения, 50 JK-триггеров, 25 декадных счетчиков и 25 четырехразрядных сдвиговых регистров.

а) Какова вероятность того, что взятая наугад микросхема окажется JK-триггером?

б) Какова вероятность того, что взятая наугад миросхема не является инвертором?

в) Если известно, что первая взятая микросхема оказалась сдвиговым регистром, то какова вероятность вытаскивания такой же микросхемы во второй раз?

1.4.4. Для задачи 1.4.3 дополнительно известно, что неисправны 10 % инверторов, 15 % схем совпадения, 18 % триггеров, а также 20 % счетчиков и сдвиговых регистров.

а) Какова вероятность вытаскивания наугад исправного счетчика?

б) Какова вероятность того, что извлеченная наугад микросхема исправна, если известно, что это JK-триггер?

в) Какова вероятность того, что извлеченная микросхема — декадный счетчик, если известно, что она исправна?

1.4.5. Предприятие выпускает небольшие электрические двигатели мощностью 73,6, 368 и 736 Вт, работающие либо от однофазной сети питания переменного тока с номинальным напряжением 120 или 240 В, либо от трехфазной сети с номинальным напряжении 240 В. Различать эти двигатели можно только по маркировке. На складе имеется 3000 таких двигателей в количествах, указанных в таблице. На одном из двигателей маркировка отсутствует. Определите вероятность того, что

Мощность двигателя, Вт	Количество двигателей с питанием от сети переменного тока с напряжением		
	120 В	240 В (однофазная сеть)	240 В (трехфазная сеть)
73,6	900	400	0
368	200	500	100
736	100	200	600

а) мощность этого двигателя равна 368 Вт,

б) сеть его питания должна быть однофазной с напряжением 240 В,

в) мощность двигателя 736 Вт, и он работает от трехфазной сети 240 В,

г) мощность двигателя 73,6 Вт и он предназначен для работы при напряжении сети 120 В.

1.4.6. Пусть для случая, описанного в предыдущей задаче, 10 % двигателей для сети питания с напряжением 120 В и 5 % двигателей для однофазной сети питания с напряжением 240 В промаркированы неправильно. Какова вероятность того, что произвольно взятый двигатель

а) окажется неправильно промаркирован?

б) из группы двигателей для однофазной сети 240 В неправильно промаркирован?

в) будет иметь мощность 368 Вт и неправильную маркировку?

1.5.1. Докажите, что в пространстве S, включающем n элементов, может быть выделено 2^n подмножеств.

Указание: Воспользуйтесь разложением $(1+x)^n$ в ряд по формуле бинома Ньютона.

1.5.2. Пусть имеется пространство $S = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ и три его под.

множества: $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{7, 9, 11\}$ и $C = \{1, 3, 9, 11\}$. Найдите

$A \cup B$	$A \cap B$	$A \cap B \cap C$	$\overline{C}$	$(\overline{B \cap C})$	$A - B$
$B \cup C$	$A \cap C$	$\overline{A}$	$\overline{A} \cap B$	$A - C$	$(A - B) \cup B$
$A \cup C$	$B \cap C$	$\overline{B}$	$A \cap \overline{B}$	$C - A$	$(A - B) \cup C$

1.5.3. Постройте и разметьте диаграммы Эйлера—Венна, иллюстрирующие задачу 1.4.4.

1.5.4. Используя операции над множествами, докажите справедливость следующих выражений:

а) $A \cup (A \cap B) = A$,

б) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

в) $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$,

г) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = A$.

1.6.1. Пусть каждому элементу введенных в задаче 1.5.2 пространства и подпространств соответствует вероятность 1/6. Найдите следующие вероятности:

а) $P(A)$, б) $P(B)$, в) $P(C)$, г) $P(A \cup B)$, д) $P(A \cup C)$, е) $P((A - C) \cup B)$.

1.6.2. Из обычной колоды в 52 карты наугад берут одну. Пусть событие A = {взятая карта — король}, событие B = {взятая карта — масти «пики»}, а событие C = {взятая карта — десятка «пик»}. Объясните, в чем состоит смысл каждого из перечисленных ниже событий, и найдите их вероятности:

а) $A \cup B$, б) $A \cap B$, в) $A \cup \overline{B}$, г) $A \cup C$, д) $B \cup C$, е) $A \cap C$, ж) $B \cap C$,

з) $(A \cap B) \cup \overline{C}$, и) $A \cap B \cap C$.

1.6.3. Из обычной колоды в 52 карты наугад берут три. Пусть событие A = {взятая в первой попытке карта — король}, B = {взятая во второй попытке карта — король}, C = {взятая в третьей попытке карта — король}. Объясните, в чем состоит смысл каждого из перечисленных ниже событий, и найдите их вероятности:

а) $A \cap \overline{B}$, б) $A \cup B$, в) $\overline{A} \cup \overline{B}$, г) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, д) $(A \cap B) \cup (\overline{B} \cap C)$,
е) $\overline{A} \cup B \cup C$.

1.6.4. Докажите, что $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B)$.

1.6.5. Два полупроводниковых диода соединены последовательно. Вероятность короткого замыкания каждого из них составляет 0,05, а обрыва — 0,1. Если считать, что неисправность, возникшая в одном диоде, не влияет на работу другого, то какова вероятность работоспособности цепи?

1.7.1. Кодирование сообщений в цифровой системе связи выполняется путем преобразования их в последовательность двоичных символов 0 и 1. Воздействие шума приводит к тому, что время от времени при приеме происходят ошибки. Пусть вероятность передачи нуля составляет 0,4, а единицы — 0,6. Кроме того, пусть вероятность приема 1 при передаче 0 равна 0,08, а вероятность приема 0 при передаче 1 равна 0,05. Найдите:

а) вероятность того, что переданный 0 будет принят правильно,

б) вероятность того, что переданная 1 будет принята правильно,

в) вероятность ошибки при приеме любого символа.

1.7.2. Иногда при печати машинистка допускает ошибки, ударяя по клавише, находящейся справа или слева от нужной, причем вероятность удара по каждой из этих ошибочных клавиш составляет 0,02. На стандартной латинской

клавиатуре литеры E, R и T находятся рядом, а в текстах на английском языке они встречаются с вероятностью $P(E) = 0{,}1031$, $P(R) = 0{,}0484$, $P(T) = 0{,}0796$.

а) С какой вероятностью в отпечатанном этой машинисткой материале будет встречаться буква R?

б) Какова вероятность того, что буква R, встретившаяся в таком материале, будет ошибочной?

1.7.3. На автомате по продаже сладостей имеется десять кнопок, одна из которых вообще не работает, две другие работают только половину времени, а остальные — все время. В произвольный момент времени в него опускают монету и нажимают кнопку.

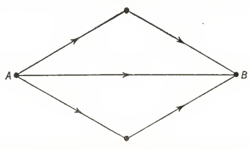
а) Какова вероятность того, что автомат при этом вообще ничего не выдаст?

б) Если автомат ничего не выдал, то какова вероятность того, что была нажата неработающая кнопка?

в) Если же автомат выдал какой-либо товар, то какова вероятность того, что была нажата одна из кнопок, работающих только часть времени?

1.7.4. Монету подбрасывают и, если выпадает решетка, кидают одну игральную кость, а если герб — две кости. Предположим, что в опыте выпало число 3, но не известно, сколько костей было брошено. Какова вероятность того, что при бросании монеты выпала решетка?

1.7.5. Пять линий связи образуют систему, показанную ниже.



Вероятность исправной работы каждой из этих линий равна 0,9. Какова вероятность передачи сообщения из пункта A в пункт B?

1.7.6. Фирма-изготовитель покупает комплектующие изделия для выпускаемой ею продукции у трех поставщиков. Вероятность того, что изделие полученное от поставщика A, окажется негодным, составляет 0,1, от поставщика B — 0,15, а от поставщика C — 0,05. Определите

а) вероятность того, что выбранное случайным образом изделие окажется негодным;

б) вероятность того, что негодное изделие поступило от поставщика B.

1.7.7. У радиолюбителя есть три шкафчика, в каждом из которых имеются по два выдвижных ящика с радиоэлектронными элементами. В обоих ящиках первого шкафчика лежат *npn*-транзисторы, а в обоих ящиках второго — *pnp*-транзисторы. В третьем же шкафчике транзисторы *npn*-типа собраны в первом ящике, а *pnp*-типа во втором. Радиолюбитель наугад берет транзистор из любого ящика одного из шкафчиков.

а) Какова вероятность того, что выбранный транзистор окажется *npn*-типа?

б) Какова вероятность того, что транзистор был взят из третьего шкафчика, если известно, что этот транзистор *npn*-типа?

в) Какова вероятность того, что транзистор был взят из первого шкафчика, если известно, что он *npn*-типа?

1.7.8. Докажите, что $P(A \mid B) > P(B \mid A)$, если $P(A) > P(B)$.

1.8.1. Определим для опыта бросания пары игральных костей события $A = \{$выпадение суммы очков $\geqslant 6\}$ и $B = \{$выпадение суммы очков $\leqslant 6\}$. Зависимы ли эти события?

1.8.2. Если события A, B и C независимы, то докажите, что иезависимы и следующие события:

а) A и $B \cup C$; б) A и $B \cap C$; в) A и $B - C$.

1.8.3. Бросают пару игральных костей. Пусть в этом опыте события A и B заключаются в выпадеиии нечетных чисел иа первой и второй кости, а событие C пусть состоит в выпадении нечетиой суммы очков. Докажите, что эти события являются

а) попарио иезависимыми,

б) взаимио независимыми.

1.8.4. Пусть событие A ие зависит от события B. Докажите, что

а) A ие зависит от $\overline{B}$;

б) $\overline{A}$ ие зависит от $\overline{B}$.

1.9.1. Выполняется совместный опыт, состоящий в бросании двух монет и одной игральиой кости. Для монет исходы могут быть следующими: РР, ГГ, ГР (исходы ГР и РГ считают одинаковыми, не учитывая того, на какой из монет выпал герб, а на какой — решетка). Исходы для кости заключаются в выпадении чисел от 1 до 6.

а) Укажите все элементы декартова произведения.

б) Определив событие A как выпадение двух решеток на монетах и очка 3 иа кости, иайдите вероятность этого события.

1.9.2. При производстве некоторого электроииого устройства используются интегральиые схемы четырех типов. Вероятности иеисправности этих ИС таковы: 0,05 для схем совпадеиия И-НЕ (которые в случае исправиости обозначаются как G, а неисправности — как $\overline{G}$); 0,1 — для триггеров (F и $\overline{F}$ соответственно); 0,03 — для счетчиков (C и $\overline{C}$ соответствеино) и 0,12 — для сдвиговых регистров (S и $\overline{S}$ соответствеино).

а) Запишите все элементы декартова произведеиия.

б) Определите вероятиость работоспособности собранного устройства.

в) В случае неработоспособиости собраниого устройства определите вероятиость того, что оиа обусловлена иеисправностью триггеров.

г) В случае иеработоспособности собранного устройства определите вероятность того, что оиа обусловлена одновременной неисправностью счетчиков и триггеров.

1.10.1. Два человека по три раза бросают монету.

а) Какова вероятность того, что у обоих решетка выпадет ровно по два раза?

б) Какова вероятность того, что у одного из них решетка вообще ие выпадет, а у другого выпадет все три раза?

1.10.2. Если в игре встретились двое соперников равного класса, то что более вероятно для одиого из них:

а) выигрыш в четырех играх из семи или в пяти из девяти?

б) выигрыш по меньшей мере в четырех играх из семи или не менее, чем в пяти играх из девяти?

1.10.3. Докажите, что $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$.

1.10.4. Харви Гладиатор, бейсбольный приииимающий, может перехватить две трети брошенных ему мячей. Для выигрыша его команды он должен принять три передачи. Квортербэк четырежды дает Харви пас. Определите вероятность того, что

а) Харви не сможет принять все эти четыре передачи.

б) Харви приведет свою команду к победе.

1.10.5. Необходимо создать комитет, в состав которого входили бы три инжеиера-электрика и два инженера-механика, выбраниые из группы, состоящей из семи инжеиеров-электриков и пяти инженеров-механиков. Сколькими различными способами это может быть выполнено, если

а) в состав комитета может быть введен любой из инженеров-электриков и инженеров-механиков;

б) в состав комитета может быть введен один вполне определенный инженер-электрик;

в) в состав комитета не могут быть введены два определенных инженера-механика.

1.10.6. Предположим, что в цифровой системе связи (задача 1.7.1) появление ошибок при передаче отдельных двоичных сигналов характеризуется статистической независимостью. Определите вероятность того, что при приеме шести следующих друг за другом символов

а) не будет допущено ни одной ошибки,

б) будет допущена ровно одна ошибка,

в) будет допущено более одной ошибки,

г) возникнет одна или большее число ошибок.

1.10.7. Телефонная связь с 12 абонентами, находящимися в удаленном населенном пункте, обеспечивается при помощи многоканальной СВЧ-линии; каждый из абонентов пользуется этой линией в течение 20 % времени пиковой загрузки. Сколько каналов нужно иметь, чтобы в пиковый период линия была доступна:

а) 80% абонентов в любой момент времени;

б) всем абонентам в течение 80 % времени;

в) всем абонентам в течение 95 % времени.

1.10.8. Изготовитель радиоэлектронного оборудования закупает 1000 интегральных микросхем, каждая из которых с вероятностью 0,01 может оказаться неисправной. Какова вероятность того, что

а) неисправны будут ровно 10 микросхем?

б) все микросхемы окажутся исправными?

в) из всех микросхем неисправна будет лишь одна?

ЛИТЕРАТУРА

Все приведенные ниже издания посвящены вопросам, рассмотренным в гл. 1. Особенно полезны и доступны для понимания [1, 4, 5, 7, 9].

1. *Beckmann P.* Elements of Applied Probability Theory. New York: Harcourt, Brace and World, Inc., 1968.

В этой книге затрагиваются многие вопросы, обсуждаемые в первых шести главах настоящей книги, и изложение материала ведется, как правило, на том же математическом уровне. Однако автор часто подходит к вопросам несколько иначе, а это дает возможность углубить или расширить соответствующие концепции. В книге приведен ряд интересных примеров.

2. *Clarke A. B., Disney R. L.* Probability and Random Processes for Engineers and Scientists. New York: John Wiley and Sons. Inc., 1970.

Эта книга предназначена для студентов научных и технических специальностей. Математический уровень ее в некоторых отношениях выше уровня настоящей книги, а круг рассмотренных вопросов несколько уже. Изложение материала по теории вероятностей и случайным процессам характеризуется строгостью и полнотой, однако отсутствует обсуждение применения соответствующих концепций в приложении к системному анализу. В ней также широко рассмотрены марковские процессы и теория массового обслуживания — темы, редко затрагиваемые в книгах, предназначенных для студентов.

3. *Davenport W. B., Jr, Root W. L.* Introduction to Random Signals and Noise. New York: McGraw-Hill, Inc., 1958. [Имеется перевод: Давенпорт В. Б., Рут В. Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. — М., ИЛ, 1960.]

Эта книга написана на доступном подготовленным читателям уровне и посвящена применению вероятностных методов анализа систем связи. Изложение

ведется на заметно более высоком в сравнении с настоящей книгой математическом уровне, и от читателя потребуются определенные усилия. Однако он будет щедро вознагражден, поскольку в своей области эта книга является классической и наиболее часто цитируемой.

4. *Drake A. W.* Fundamentals of Applied Probability Theory. New York: McGraw-Hill, Inc., 1967.

В этой книге, предназначенной для студентов, в ясной и легкодоступной форме изложены наиболее простые аспекты теории вероятностей. Материал ее непосредственно соответствует содержанию гл. 1—3 настоящей книги. Особый интерес представляет применение фурье-преобразования плотности вероятностей непрерывных случайных величин и Z-преобразования плотности вероятностей дискретных случайных величин вместо характеристических функций.

5. Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. — 9-е изд. — М., Наука, 1982.

Эта небольшая по объему книга для высшей школы была написана двумя выдающимися советскими математиками. В ней очень ясно и доступно описаны основные представления теории вероятностей, рассматриваемые в гл. 1 и 2 настоящей книги. Изложение ведется на достаточно простом математическом уровне и практически не выходит за рамки несложных алгебраических методов. Тем не менее рассматриваемые в ней вопросы имеют фундаментальное значение и изучение этой книги может быть очень полезно для понимания сути теории вероятностей.

6. *Helstrom C. W.* Probability and Stochastic Processes for Engineers. New York: Macmillan, Inc., 1984.

Эта книга, соответствующая современному уровню науки и специально предназначенная для студентов технических ВУЗов. Хотя в ней при изложении материала в сравнении с настоящей книгой применен несколько более математизированный подход, она проста и легка для понимания. Особый упор сделан на рассмотрение понятий вероятности, случайных величин и случайных процессов, однако очень мало внимания уделено применению соответствующих концепций для системного анализа. В книгу включено множество превосходных задач.

7. *Lanning J. H., Jr., Battin R. H.* Random Processes in Automatic Control. New York: McGraw-Hill, Inc., 1956.

Эта книга предназначена для аспирантов, специализирующихся в области систем автоматического управления. Однако в ее первой половине четко и доступно изложены вопросы теории вероятностей и случайных процессов на уровне, вполне пригодном для усвоения студентами-старшекурсниками, изучающими радиоэлектронику. Подход к некоторым темам, например к случайным процессам, по сравнению с настоящей книгой отличается большей детальностью. В рассматриваемом источнике содержится материал, относящийся фактически ко всем темам, затронутым в настоящей книге, хотя при описании в заключительных главах некоторых приложений применяются более современные математические концепции.

8. *Papoulis A.* Probability, Random Variables, and Stochastic Processes. — 2nd. ed. New York: McGraw-Hill, Inc., 1984.

Эта широко используемая книга предназначена для аспирантов и посвящена приложению теории вероятностей к решению задач практической радиоэлектроники. В ней рассматриваются фактически все вопросы, освещенные в настоящей книге, а также многие другие. Изложение ведется на гораздо более абстрактном и математизированном языке, чем в настоящей книге, однако в нее включено большое число полезных примеров и следствий.

9. *Parzen E.* Modern Probability Theory and its Applications. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1960.

Эта книга представляет собой обычный учебник по теории вероятностей. Материал представлен в ясной форме, рассмотрены примеры и задачи, посвященные многим интересным приложениям этой теории.

10. *Peebles P. Z.* Probability, Random Variables, and Random Signal Principles. New York: McGraw-Hill, Inc., 1980.

Книга предназначена для студентов, и в ней изложены по существу те же вопросы, что и в настоящей книге, хотя и на более простом математическом уровне и с меньшим количеством обсуждаемых приложений. В ней, однако, приведено множество превосходных задач.

11. *Spiegel M. R.* Theory and Problems of Probability and Statistics. Schaum's Outline Series in Mathematics. New York: McGraw-Hill, Inc., 1975.

Это издание конспективного характера, которое совместно с настоящей книгой может использоваться для самостоятельного изучения теории вероятностей. Хотя оно и отличается краткостью изложения, но тем не менее содержит все основные определения и множество примеров. В книгу включено большое количество очень хороших задач с ответами. Эта книга является одной из немногих, где приведены материалы как по теории вероятностей, так и по статистике.

12. *Thomas J.* An Introduction to Statistical Communication Theory. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1969.

В этой книге, предназначенной для аспирантов, дается широкий обзор теории вероятностей и случайных процессов, а также рассматривается применение их для решения разнообразных системных задач. В ней затронуто большинство вопросов, обсуждаемых в настоящей книге, хотя местами рассмотрение проводится на уровне, доступном читателю, лучше подготовленному по математике. Кроме того, в ней уделено внимание и ряду дополнительных тем. Эта книга представляет несомненный интерес для студентов, которые хотят получить более полные знания о методах вероятностного анализа. В конце каждой главы приведен обширный список, в котором перечислены как книги, так и журнальные статьи.

13. *Thomas J. B.* An Introduction to Applied Probability and Random Processes. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1971.

Эта книга написана на доступном аспирантам уровне и посвящена вопросам теории вероятностей и случайным процессам. Она сложнее настоящей книги, однако круг обсуждаемых в них вопросов примерно одинаков. Она полезна для дополнительного чтения.

Глава 2

Случайные величины

2.1. Понятие случайной величины

В предыдущей главе рассматривались только такие ситуации, в которых число возможных исходов, связанных с любым из опытов, было конечным. Хотя и не утверждалось, что их число должно быть конечным (поскольку в действительности это не так), соответствующее предположение выдвигается и является совершенно справедливым для таких поясняющих примеров, как опыты с монетами, игральными костями и резисторами, вынимаемыми из коробок. Существует, однако, множество других опытов, число возможных исходов которых не будет конечным, и целью настоящей главы является представление способов описания таких опытов в соответствии с введенными выше представлениями теории вероятностей.

Неплохой способ начального описания ситуации с бесконечным числом возможных исходов заключается в дальнейшем рассмотрении все того же опыта с выбором резистора из коробки. В гл. 1 в ходе изучения соответствующего примера было сделано замечание о том, что выбор 1-омного или 10-омного резистора означает, что они имеют маркировку «1 Ом» или «10 Ом». В реальных же условиях сопротивления резисторов близки к этим номинальным значениям и могут отличаться от них на некоторую неизвестную (но измеримую) величину. Отклонения сопротивлений от номинальных возникают из-за нестабильностей процесса изготовления резисторов, и сопротивления могут принимать любые значения в пределах некоторого заданного диапазона. Поскольку фактическое значение сопротивления наперед не известно, оно является *случайной величиной*.

Представим далее коробку с резисторами, каждый из которых имеет маркировку 100 Ом. В связи с технологическими допусками фактические сопротивления всех этих резисторов несколько отличаются друг от друга. Кроме того, количество возможных значений сопротивлений бесконечно, так что опыту, заключающемуся в выборе одного резистора, соответствует бесконечное число возможных исходов. Даже если известно, что все сопротивления не выходят за пределы 99,99—100,01 Ом, возможных значений внутри

этого интервала бесконечно много. Таким образом, если определить какое-то отдельное событие как выбор резистора с сопротивлением 100 Ом, вероятность его будет равна нулю. С другой стороны, если определить событие как выбор резистора с сопротивлением от 99,9999 до 100,0001 Ом, то его вероятность будет ненулевой. Фактическое значение сопротивления и в данном случае следует полагать случайной величиной, которая в указанном диапазоне может принять любое значение.

Понятие случайной величины можно связать также с функциями времени, и в большинстве рассматриваемых в настоящей книге приложений фигурируют величины именно такого типа.

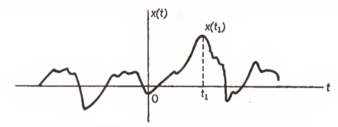


Рис. 2.1. Реализация случайной функции времени.

Хотя в гл. 3 мы будем иметь дело исключительно со случайными величинами и функциями времени, здесь стоит несколько отвлечься, чтобы отметить наличие связи между этими понятиями, так как это даст возможность понять, в чем состоит практическая польза от проводимого изучения.

Предположим, что в результате некоторого опыта реализована случайная функция времени $x(t)$, пример которой дан на рис. 2.1. В определенных практических ситуациях такая реализация является лишь одной из бесконечного множества потенциально возможных. Совокупность всех реализаций образует случайный процесс, обозначаемый $X(t) = \{x(t)\}$. Если для него определены также и вероятностные характеристики, эта совокупность называется *ансамблем*. Любой член ансамбля (например, $x(t)$) представляет собой *выборочную функцию* и ее значение в некоторый определенный момент времени, к примеру в момент t_1 является случайной величиной, обозначаемой $X(t_1)$ или просто X_1. Таким образом, $X_1 = x(t_1)$, если $x(t)$ — отдельная наблюдаемая выборочная функция (реализация) случайного процесса $X(t)$.

Понятие случайной величины, связанной со случайным процессом, шире, чем то, которое вытекало из приведенного выше примера с резисторами. Во-первых, здесь в каждый момент времени фигурирует своя случайная величина, хотя между любыми двумя величинами, соответствующими различным моментам времени, обычно имеется определенная связь. Во-вторых, случайный

характер, о котором здесь говорится, наблюдается по всему ансамблю при переходе от одной выборочной функции к другой. Кроме того, аналогичный случайный характер может наблюдаться и при переходе от одного момента времени к другому. В связи с этим вероятностное описание случайных величин одновременно может служить вероятностным описанием случайного процесса. Однако наше начальное рассмотрение будет ограничено рамками случайных величин, а затем распространено на случайные процессы.

С точки зрения инженерного подхода случайная величина — это просто числовое описание исхода случайного опыта. Вспомним, что пространство выборок $S = \{\alpha\}$ представляет собой множество всех возможных исходов эксперимента. При исходе α случайная величина X принимает значение, которое можно обозначить $X(\alpha)$. При таком подходе случайная величина — просто действительная функция, определенная на пространстве выборок, и на практике фундаментальное определение случайной величины является таким же простым, как и определение функции (с учетом некоторых ограничений, необходимых для математической последовательности). Однако для технических приложений обычно нет необходимости рассматривать в явном виде пространство выборок. Как правило, нужно уметь приписывать вероятности различным событиям, связанным с рассматриваемыми случайными величинами, причем часто эта оценка может проводиться исходя непосредственно из сведений о конкретной практической ситуации. Последняя тема, которая будет затронута в данной главе, связана с вопросом о том, какие события должны рассматриваться для получения исчерпывающего описания случайной величины и каким образом могут быть найдены соответствующие им вероятности.

Если случайная величина способна принимать любые значения внутри заданного диапазона (возможно бесконечного), то ее называют *непрерывной*. Ниже все случайные величины будут считаться непрерывными, если не будет оговорено иное. Как будет показано, к дискретным случайным величинам (т. е. принимающим значения из конечного набора) могут применяться те же способы, что и к непрерывным.

2.2. Функция распределения вероятностей

Чтобы рассмотрение непрерывных случайных величин оставалось в рамках теории вероятностей, обсужденных в гл. 1, необходимо определить события, связанные с вероятностным пространством. Существуют много способов определения таких событий, но метод, описываемый ниже, является практически общепринятым. В основе его лежит использование так называемой функции распределения вероятностей.

Пусть X — случайная величина в том смысле, как она определена выше, а x — любое ее допустимое значение. *Функцию распределения вероятностей* определяют как вероятность события, заключающегося в том, что наблюдаемая случайная величина меньше или равна допустимому ее значению x, т. е.

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leqslant x)^{1)}.$$

Иногда ее называют *функцией распределения*.

Поскольку эта функция представляет собой вероятность, она должна удовлетворять основным аксиомам теории вероятностей и обладать свойствами, присущими вероятностям и указанными

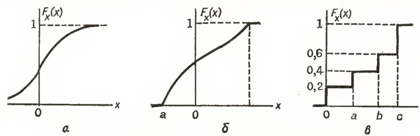


Рис. 2.2. Примеры функций распределения вероятностей.

в гл. 1. Однако эта функция зависит от возможных значений x случайной величины X, и поэтому должна в общем виде определяться для всех значений x. Таким образом, требование, чтобы функция распределения вероятностей $F_X(x)$ представляла собой вероятность, накладывает на ее свойства определенные ограничения. Они могут быть в итоге записаны следующим образом:

1) $0 \leqslant F_X(x) \leqslant 1, \quad -\infty < x < \infty,$

2) $F_X(-\infty) = 0, \quad F_X(\infty) = 1,$

3) $F_X(x)$ не уменьшается при возрастании x,

4) $\mathrm{P}(x_1 < X \leqslant x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1).$

Примеры функций распределения вероятностей представлены на рис. 2.2. На рис. 2.2, *а* показан график функции распределения вероятностей для непрерывной случайной величины, изменяющийся от $-\infty$ до $+\infty$, а на рис. 2.2, *б* — с областью изменения от a до b. На рис. 2.2, *в* изображен график функции распределения вероятностей для дискретной случайной величины, которая

[1]) Индекс X служит для обозначения случайной величины, а аргумент x может быть заменен любым другим символом. В ходе дальнейшего рассмотрения индекс X часто будет опускаться, если это не будет приводить к потере однозначности записи. Таким образом, $F_X(x)$ в ряде случаев будет записываться как $F(x)$.

может принимать только четыре возможных значения (0, a, b, c). При рассмотрении функций распределения вероятностей такого типа важно помнить, что в определение $F_X(x)$ включены условия $X = x$ и $X < x$. Поэтому на рис. 2.2, *в* $F_X(a)$ будет равно 0,4, а не 0,2.

Функция распределения вероятностей может также использоваться для нахождения вероятности события, заключающегося в том, что наблюдаемая величина X принимает значение, большее

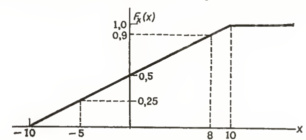


Рис. 2.3. Особый случай функции распределения вероятностей.

(но не равное) x. Поскольку такое событие противоположно событию с вероятностью $F_X(x)$ ясно, что

$$P(X > x) = 1 - F_X(x).$$

Обратимся к частному случаю функции распределения вероятностей, график которой показан на рис. 2.3. Обратите внимание, что эта функция отвечает всем требованиям, перечисленным выше. Из рисунка следует справедливость нескольких утверждений из множества возможных:

$$P(X \leqslant -5) = 0{,}25, \qquad P(X > -5) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75,$$

$$P(X > 8) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1, \qquad P(-5 < X \leqslant 8) = 0{,}9 - 0{,}25 = 0{,}65,$$

$$P(X > 0) = 1 - P(X \leqslant 0) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5.$$

В рассматриваемом примере интервал изменения аргумента функции распределения вероятностей ограничен конечными пределами. Однако так бывает не всегда. Обратимся, в частности, к функции распределения вида

$$F_X(x) = {}^1/_2\,[1 + (2/\pi)\,\mathrm{arctg}\,(x/5)], \quad -\infty < x < \infty, \qquad (2.1)$$

график которой представлен на рис. 2.4. В этом случае снова можно сделать ряд утверждений о вероятности события, состоящего в том, что значения случайной величины X будут лежать

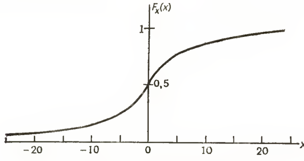


Рис. 2.4. Функция распределения вероятностей случайной величины, изменяющейся на бесконечном интервале.

внутри заданных интервалов. Например, легко проверить справедливость следующих соотношений:

$$P(X \leqslant -5) = 0{,}25, \quad P(X > -5) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75,$$
$$P(X > 8) = 1 - 0{,}8222 = 0{,}1778,$$
$$P(-5 < X \leqslant 8) = 0{,}8222 - 0{,}25 = 0{,}5722,$$
$$P(X > 0) = 1 - P(X \leqslant 0) = 0{,}5.$$

Упражнение 2.2.1. Случайной величиной X в опыте с бросанием шести монет считают число выпавших при испытании решеток.

а) Нарисуйте график функции распределения вероятностей для этой случайной величины.

Какова вероятность того, что случайная величина X примет значение:

б) меньше 3,5?

в) больше 2,5?

г) в интервале от 1,5 до 5?

Ответы: 0,6563; 0,875; 0,6563.

Упражнение 2.2.2. Функция распределения вероятностей случайной величины имеет следующий вид:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0, \\ 1 - e^{-x}, & 0 \leqslant x < \infty. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что

а) $X > 0{,}5$, б) $X \leqslant 0{,}25$, в) $0{,}3 < X \leqslant 0{,}7$.

Ответы: 0,2212; 0,6065; 0,2442.

2.3. Плотность распределения вероятностей

Хотя функция распределения и дает исчерпывающее описание вероятностной модели одной случайной величины, ее форма не всегда удобна для выполнения необходимых расчетов. Иногда предпочтительнее использовать не саму функцию $F_X(x)$, а ее производную. Она называется ***плотностью распределения вероят-***

ностей (*плотностью вероятностей*) и в случае существования определяется как [2])

$$f_X(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F_X(x+\Delta x)-F_X(x)}{\Delta x}=\frac{dF_X(x)}{dx}.$$

Физический смысл плотности распределения вероятностей лучше раскрыть через элемент вероятности $f_X(x)\,dx$. Его можно записать в виде

$$f_X(x)\,dx=\mathrm{P}(x<X\leqslant x+dx). \tag{2.2}$$

Это соотношение утверждает, что элемент вероятности $f_X(x)\,dx$ есть вероятность того, что случайная величина X лежит в диапазоне возможных значений между x и $x+dx$.

Поскольку $f_X(x)$ — это плотность распределения вероятностей, а не сама вероятность, она не должна обязательно быть меньше 1 и может принимать любые неотрицательные значения [3]). Основные ее свойства записываются следующим образом:

1) $f_X(x)\geqslant 0,\quad -\infty<x<\infty,$

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx=1$*,

3) $F_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du,$

4) $\int\limits_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,dx=\mathrm{P}(x_1<X\leqslant x_2).$

На рис. 2.5 показаны примеры графиков плотности распределения вероятностей, соответствующие функциям распределения, проиллюстрированным на рис. 2.2. Обратите особое внимание на то, что плотность распределения вероятностей для дискретной случайной величины представляет собой совокупность дельта-функций, площадь каждой из которых равняется соответствующему скачкообразному приращению функции распределения вероятностей. Могут встречаться также плотности распределения

---

[2]) Здесь вновь индекс X соответствует случайной величине X и, если это не вызывает неясностей, его можно опустить. В связи с этим $f_X(x)$ часто будет записываться как $f(x)$.

[3]) Поскольку $F_X(x)$ не уменьшается при увеличении x.

* Данное свойство означает, что площадь, ограниченная осью абсцисс и кривой $f_X(x)$, равна 1. Оно имеет очень важное значение в теории вероятностей и называется условием нормировки плотности распределения вероятностей. — *Прим. ред.*

вероятностей, где непрерывные участки сочетаются с одной или большим числом дельта-функций.

Существует много различных математических выражений, с помощью которых можно описывать плотности распределения вероятностей, однако лишь часть из них имеет определенную практическую ценность при анализе технических систем. Некоторые из этих выражений рассмотрены в дальнейших разделах, а в приложении Б приведена таблица, содержащая много примеров плотности распределения вероятностей.

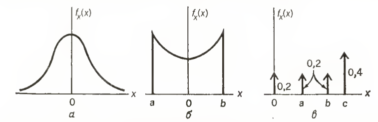


Рис. 2.5. Плотности распределения вероятностей для функций распределений, показанных на рис. 2.2.

Однако, прежде чем переходить к изучению наиболее важных из них, обратимся к плотностям распределения вероятностей, соответствующим описанным в разд. 2.2 функциям распределения. Из рис. 2.3 следует, что плотность распределения вероятностей случайной величины X при $x \leqslant -10$ и $x > 10$ должна равняться нулю. Кроме того, в интервале от -10 до $+10$ она должна иметь постоянное значение, поскольку на этом участке угол наклона графика функции распределения не изменяется. Таким образом,

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -10, \\ 0{,}5, & -10 < x \leqslant 10, \\ 0, & x > 10. \end{cases}$$

График этой функции показан на рис. 2.6.

Плотность вероятностей для функции распределения, график которой показан на рис. 2.4, находится дифференцированием выражения (2.1). Таким образом,

$$f_X(x) = dF_X(x)/dx = d[1/2 + (1/\pi)\operatorname{arctg}(x/5)]/dx = \\ = 5/\pi(x^2 + 25), \quad -\infty < x < \infty. \qquad (2.3)$$

График этой функции приведен на рис. 2.7.

При исследовании технических систем часто встречаются ситуации, когда одна случайная величина является функцией другой, с известной плотностью распределения вероятностей, причем необходимо определить плотность вероятностей первой.

Пусть, например, интерес представляет плотность вероятностей мощности, если известны плотности вероятностей других связанных с ней случайных величин — напряжения или тока. Или, скажем, нужно определить плотность распределения вероятностей случайного напряжения или тока после выполнения над ними

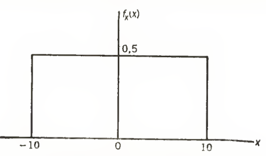


Рис. 2.6. Плотность вероятностей, соответствующая функции распределения, показанной на рис. 2.3.

какого-либо нелинейного преобразования. Хотя нет необходимости проводить здесь исчерпывающее исследование затронутой проблемы, несколько основных положений, используемых в ходе дальнейшего обсуждения, будут изложены.

Для проведения в последующем формальных математических преобразований предположим, что случайная величина Y — одно-

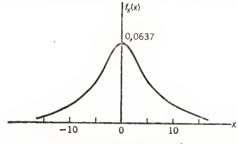


Рис. 2.7. Плотность вероятностей, соответствующая функции распределения, показанной на рис. 2.4.

значная действительная функция другой случайной величины X, т. е.[4]) $Y = g(X)$. При этом плотность распределения вероятностей $f_X(x)$ считается известной, и нужно определить плотность вероятностей $f_Y(y)$ случайной величины Y. На рис. 2.8, *а* показан график функции $g(X)$ для частного случая ее монотонного воз-

[4]) Отсюда также понятно, что возможные значения X и Y связаны соотношением $y = g(x)$.

растания. Из него следует, что если случайная величина X принимает значения в интервале от x до $x + dx$, то случайная величина Y — от y до $y + dy$. Поскольку вероятности этих событий есть соответственно $f_X(x)\,dx$ и $f_Y(y)\,dy$, можно сразу записать соотношение $f_Y(y)\,dy = f_X(x)\,dx$, из которого получим выражение для искомой плотности вероятностей:

$$f_Y(y) = f_X(x)\,dx/dy. \tag{2.4}$$

Естественно, в правой части (2.4) аргумент x должен быть выражен через обратную функцию от y.

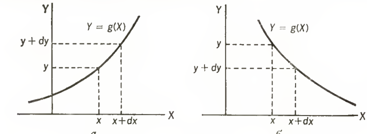


Рис. 2.8. Преобразование случайных величин.

Для монотонно убывающей функции $Y = g(X)$ (рис. 2.8, *б*) результат оказывается аналогичным и различие будет только в знаке производной. Рассматривая график на рис. 2.8, *б* и учитывая неотрицательность плотности вероятностей, легко понять, какие изменения требуется ввести в (2.4): в нем должно фигурировать значение производной, взятое по абсолютной величине. Поэтому в общем случае

$$f_Y(y) = f_X(x)\,|dx/dy|. \tag{2.5}$$

Чтобы проиллюстрировать различные преобразования случайных величин, обратимся сперва к наиболее простой задаче линейного преобразования случайных величин. Пусть известна плотность вероятностей случайной величины X. Рассмотрим другую случайную величину Y, связанную с первой линейным соотношением $Y = AX$. С такой ситуацией можно столкнуться, в частности, если X и Y являются сигналами на входе и выходе неискажающего линейного усилителя. Поскольку возможные значения X и Y связаны линейно, $dy/dx = A$ и из (2.5) следует, что искомая плотность распределения вероятностей случайной величины Y

$$f_Y(y) = (1/|A|)\,f_X(y/A).$$

Таким образом, определение плотности вероятностей любой случайной величины, представляющей собой «масштабированную копию» другой случайной величины с известной плотностью распределения вероятностей, является достаточно простой задачей.

Рассмотрим теперь следующий частный пример преобразования случайных величин. Пусть плотность распределения вероятностей случайной величины X имеет вид

$$f_X(x) = e^{-x} u(x),$$

где $u(x)$ — единичная функция, определяемая следующим образом:

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

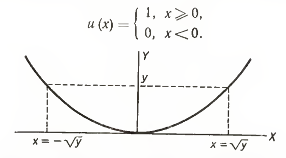


Рис. 2.9. Возведение в квадрат случайной величины.

Пусть случайная величина Y связана с X соотношением $Y = X^3$. Поскольку y и x связаны таким же образом, понятно, что

$$dy/dx = 3x^2, \quad dx/dy = 1/3x^2 = 1/3y^{2/3}.$$

В соответствии с этим искомая плотность распределения вероятностей случайной величины Y равна

$$f_Y(y) = {}^1/_3 y^{-2/3} u(y) \exp\{-y^{1/3}\}.$$

Случайная величина Y может быть такой, что производная функции $g(X)$ может менять знак. В таких случаях рассмотрение участков с разным знаком производной можно проводить по отдельности, а затем объединять найденные плотности распределения вероятностей. Приведем для иллюстрации преобразования такого типа следующий пример.

Пусть две случайные величины связаны соотношением $Y = X^2$. График такой функции показан на рис. 2.9 и может изображать преобразование случайного напряжения в случайную мощность (без учета масштаба). Поскольку абсолютное значение производной dx/dy может быть записано в виде $|dx/dy| = 1/2y^{1/2}$

и поскольку каждому значению y соответствуют два значения x ($x = \pm y^{1/2}$), искомая плотность распределения вероятностей будет записываться как

$$f_Y(y) = (1/2y^{1/2})\,[f_X(y^{1/2}) + f_X(-y^{1/2})], \quad y \geqslant 0. \tag{2.6}$$

Кроме того, поскольку y не может принимать отрицательных значений

$$f_Y(y) = 0, \quad y < 0.$$

Ниже будут рассмотрены некоторые другие приложения преобразований случайных величин.

Упражиеиие 2.3.1. Плотность распределення вероятностей случайиой велнчнны X нмеет внд

$$f_X(x) = Ku(x)\,e^{-2x},$$

где $u(x)$ — единичная функция. Определнте

а) чему равно K;

б) вероятность того, что $X > 1$;

в) вероятность того, что $X \leqslant 0{,}5$.

Ответы: 0,1353; 0,6321; 2,0.

Упражнеиие 2.3.2. Случайные велнчнны Y и X (плотность распределения вероятностей X определена в предыдущем упражненнн) связаны следующим образом: $Y = 6X + 3$. Найднте плотность вероятностей случайной велнчииы Y.

Ответ: $1/3 \exp[-(y-3)/6]$.

2.4. Средние значения и моменты случайных величин

Одной из самых важных и фундаментальных концепций, связанных со статистическими методами, является способ нахождения средних значений случайных величин или их функций. Инженеры-электрики умеют определять средние значения функций времени, интегрируя их на некотором интервале времени, а затем деля полученную величину на продолжительность этого интервала: указанная операция используется для нахождения постоянной составляющей, среднего квадратического отклонения или средней мощности таких функций и называется *усреднением по времени*. Средние по времени значения важны при рассмотрении случайных функций времени, но, разумеется, говорить о среднем одиночного значения случайной величины не имеет смысла, поскольку оно определяется как мгновенное значение. Для определения среднего значения случайной величины нужно интегрирование по времени заменить интегрированием по диапазону возможных значений, которые она может принимать. Такая операция называется *усреднением по ансамблю*.

Применяется несколько способов записи операции нахождения среднего значения, но в технической литературе чаще используют запись следующего вида: [5])

$$\overline{X} = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx. \tag{2.7}$$

Величина $E[X]$ называется *математическим ожиданием* X. Как будет показано ниже, во многих практических случаях математическое ожидание случайной величины равно среднему по времени значению любой из выборочных функций, относящихся к случайному процессу, к которому принадлежит рассматриваемая случайная величина. В таких ситуациях нахождение математического ожидания изменяющихся случайным образом напряжения или тока эквивалентно определению их постоянных составляющих.

С помощью выражения (2.7) может быть найдено математическое ожидание любой функции от x. Итак,

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,dx. \tag{2.8}$$

Функции вида $g(x) = x^n$ имеют особое значение, поскольку входят в общее выражение для *начальных моментов* случайной величины:

$$\overline{X^n} = E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\,dx. \tag{2.9}$$

Самыми важными из моментов $E[X^n]$ случайной величины X являются *начальный момент 1-го порядка* (при $n = 1$), равный математическому ожиданию (2.7), и *момент 2-го порядка* (при $n = 2$), посредством которого находится *средний квадрат* случайной величины,

$$\overline{X^2} = E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx. \tag{2.10}$$

Важность среднего квадрата обусловлена тем, что он часто интерпретируется как усредненный по времени квадрат случайного напряжения или тока. При этом он оказывается пропорциональным средней мощности (выделяющейся на активном сопротивлении), а корень квадратный из этой величины представляет собой эффективное значение случайного напряжения или тока.

[5]) Обратите внимание, что индекс X здесь опущен, поскольку абсолютно ясно, к какой случайной величине относится эта функция.

Кроме того, можно ввести понятие *центральных моментов*, представляющих собой моменты разности случайной величины X и ее математического ожидания $\overline{X}$. Так, центральный момент n-го порядка имеет вид

$$\overline{(X-\overline{X})^n} = E[(X-\overline{X})^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\overline{X})^n f(x)\,dx. \qquad (2.11)$$

Первый центральный момент (для $n = 1$) равен, естественно, нулю, а вот второй центральный момент (для $n = 2$) так важен, что даже получил особое название *дисперсии* и обозначение σ_X^2. Таким образом,

$$\sigma_X^2 = \overline{(X-\overline{X})^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\overline{X})^2 f(x)\,dx. \qquad (2.12)$$

Дисперсию можно определить и по-другому, если воспользоваться правилом для нахождения математического ожидания суммы случайных величин:

$$E[X_1 + X_2 + \cdots + X_m] = E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_m].$$

Поэтому

$$\sigma_X^2 = E[(X-\overline{X})^2] = E[X^2 - 2X\overline{X} + (\overline{X})^2] =$$
$$= E[X^2] - 2E[X]\overline{X} + (\overline{X})^2 = \overline{X^2} - 2\overline{X}\,\overline{X} + (\overline{X})^2 = \overline{X^2} - (\overline{X})^2, \qquad (2.13)$$

так что дисперсия — это разность между средним квадратом случайной величины и квадратом ее математического ожидания. Величина σ_X — значение корня квадратного из дисперсии — называется *стандартным* или *средним квадратическим отклонением*.

В электрических схемах дисперсия, как правило, соотносится со средней мощностью, выделяемой на активном сопротивлении переменной составляющей приложенного к нему напряжения или протекающего в нем тока. Корень квадратный из дисперсии в этом случае будет соответствовать показаниям вольтметра или амперметра, стрелки которых отклоняются на угол, пропорциональный эффективному значению переменной составляющей тока или напряжения, и которые не реагируют на постоянную составляющую (например, вследствие того что на входе прибора установлен разделительный конденсатор).

В целях лучшего усвоения материала, относящегося к математическому ожиданию и моментам, рассмотрим ситуацию, где фигурирует случайная величина X с равномерной плотностью распределения вероятностей (рис. 2.10). Такую плотность вероятно-

стей может иметь, например, пилообразное напряжение, изменяющееся линейно в диапазоне от 20 до 40 В. Математически эта функция может быть записана в виде

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leqslant 20, \\ 1/20, & 20 < x \leqslant 40, \\ 0, & 40 < x < \infty. \end{cases}$$

По формуле (2.7) найдем математическое ожидание рассматриваемой случайной величины:

$$\overline{X} = \int_{20}^{40} x\,(1/20)\,dx = (1/20)\,(x^2/2)\Big|_{20}^{40} = (1600 - 400)/40 = 30 \text{ В}.$$

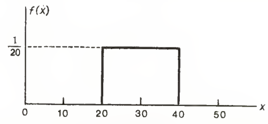


Рис. 2.10. Плотность вероятностей равномерного распределения случайной величины.

Отметим, что и интуитивно это значение представляется подходящим для того, чтобы считаться средним для описанного пилообразного сигнала. По формуле (2.10) найдем для него средний квадрат:

$$\overline{X^2} = \int_{20}^{40} x^2\,(1/20)\,dx = (1/20)\,(x^3/3)\Big|_{20}^{40} = (64 - 8)\cdot 10^3/60 = 933{,}3 \text{ В}^2.$$

Дисперсию этой случайной величины можно определить либо по формуле (2.12), либо по формуле (2.13). Из последней имеем

$$\sigma_X^2 = \left|\overline{X^2} - (\overline{X})^2\right| = 933{,}3 - (30)^2 = 33{,}3 \text{ В}^2.$$

С учетом предположений о случайных процессах, которые будут сделаны ниже, можно сказать, что если измерение пилообразного напряжения выполняется при помощи вольтметра постоянного тока, то последний должен показать 30 В. Если бы измерения выполнялись при помощи вольтметра эффективных значений переменного тока, не реагирующего на постоянную составляющую, то он показал бы $(33{,}3)^{1/2}$ В.

В качестве второго примера рассмотрим плотность распределения вероятностей вида

$$f(x) = kx\,[u(x) - u(x-1)],$$

где $u(x)$, как и ранее, представляет собой единичную функцию. Значение k может быть найдено из 0-го момента $f(x)$, поскольку он представляет собой площадь под графиком плотности распределения вероятностей и должен равняться 1. Таким образом,

$$\int_0^1 kx\,dx = k/2 = 1,$$

и, следовательно, $k = 2$. Теперь несложно определить математическое ожидание и средний квадрат, которые соответственно запишутся как

$$\overline{X} = \int_0^1 x\,(2x)\,dx = 2/3, \quad \overline{X^2} = \int_0^1 x^2\,(2x)\,dx = 1/2.$$

Отсюда получим дисперсию

$$\sigma_X^2 = \overline{X^2} - (\overline{X})^2 = 1/2 - (2/3)^2 = 1/18.$$

Аналогично, 4-й начальный момент случайной величины X запишется как

$$\overline{X^4} = \int_0^1 x^4\,(2x)\,dx = 1/3,$$

а 4-й центральный момент — как

$$\overline{(X - \overline{X})^4} = \int_0^1 (x - 2/3)^4\,(2x)\,dx = 1/135.$$

Последний интеграл без труда вычисляется, если учесть, что

$$(x - 2/3)^4\,x = (x - 2/3)^5 + (2/3)\,(x - 2/3)^4.$$

Упражнение 2.4.1. Для случайной величины X из упражнения 2.3.1 определите:

а) математическое ожидание,
б) значение среднего квадрата,
в) дисперсию.
Ответы: 1/4, 1/2, 1/2.

Упражнение 2.4.2. Плотность вероятностей случайной величины имеет вид

$$f_X(x) = {}^1/_4\,[u\,(x + 2) - u\,(x - 2)].$$

Определите для случайной величины $Y = X^2$:

а) математическое ожидание,
б) значение среднего квадрата,
в) дисперсию.
Ответы: 4/3, 64/45, 16/5.

2.5. Нормальное (гауссовское) распределение вероятностей

Среди различных функций распределения вероятностей, которые будут здесь изучаться, особое место занимает, конечно, *нормальное распределение* (*распределение Гаусса*). Его важность определяется рядом причин, среди которых необходимо отметить следующие:

1. Такое распределение служит хорошей математической моделью для ряда наблюдаемых случайных явлений. Более того, сам факт, что модель является гауссовской, можно строго доказать для многих ситуаций.

2. Нормальное (гауссовское) распределение принадлежит к числу немногих, позволяющих описывать ситуации с произвольным числом случайных величин.

3. Любые линейные комбинации гауссовских случайных величин также являются гауссовскими. Аналогичные утверждения в отношении большинства негауссовских величин будут неверны.

4. Гауссовский случайный процесс может быть полностью описан (в статистическом смысле) при помощи только первого и второго моментов. Для других процессов это утверждение несправедливо.

5. Исчерпывающий статистический анализ в ходе системного анализа как для линейных, так и для нелинейных преобразований случайных процессов нередко удается выполнить, только если эти процессы гауссовские.

Нормальная (гауссовская) плотность вероятностей имеет вид

$$f(x) = \left(1/(2\pi)^{1/2}\sigma\right) \exp\left[-(x-\overline{X})^2/2\sigma^2\right], \quad -\infty < x < \infty, \quad (2.14)$$

где $\overline{X}$ — математическое ожидание, σ^2 — дисперсия. Соответствующая ей функция распределения вероятностей к простым математическим зависимостям не сводится. Графики плотности и функции распределения вероятностей гауссовской случайной величины показаны на рис. 2.11, *а* и *б* соответственно. Следует отметить ряд их особенностей.

1. Плотность распределения вероятностей гауссовской случайной величины имеет только один максимум, который соответствует математическому ожиданию.

2. График этой функции симметричен относительно математического ожидания.

3. Ширина нормальной плотности вероятностей прямо пропорциональна *среднему квадратическому* (*стандартному*) *отклонению* σ. На уровне 0,607 от максимального значения функции $f_X(x)$ она равна $2\sigma_X$. В этих точках абсолютная величина производной $df_X(x)/dx$ достигает своего максимального значения.

4. Максимальное значение нормальной плотности распределения вероятностей обратно пропорционально стандартному от-

клонению σ. Поскольку площадь под кривой (2.14) равна единице, ее можно использовать для определения единичного импульса (или дельта-функции), устремив $\sigma \to 0$, т. е.

$$\delta(x - \overline{X}) = \lim_{\sigma \to 0} \left(1/(2\pi)^{1/2}\sigma\right) \exp\{-(x - \overline{X})^2/2\sigma^2\}. \qquad (2.15)$$

Преимущество такого введения дельта-функции перед некоторыми другими состоит в том, что она в этом случае оказывается бесконечно дифференцируемой.

Функция распределения вероятностей для гауссовской случайной величины, как отмечалось выше, не может быть записана в виде компактного математического выражения с использова-

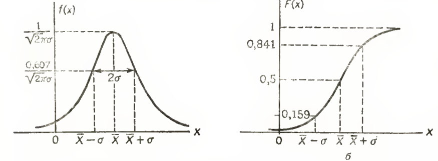


Рис. 2.11. Плотность вероятностей (*а*) и функция распределения (*б*) гауссовской случайной величины.

нием элементарных функций. Ее можно, однако, выразить через широко известные табулированные функции. С учетом связи между функцией распределения и плотностью распределения вероятностей можно записать следующее общее выражение для функции распределения вероятностей гауссовской случайной величины:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = (2\pi)^{-1/2}\sigma^{-1} \int_{-\infty}^{x} \exp\left[(u - \overline{X})^2/2\sigma^2\right] du. \quad (2.16)$$

Обычно табулируют функцию нормированного гауссовского распределения вероятностей, характеризуемого математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией, равной единице (т. е. $\overline{X} = 0$, $\sigma = 1$). Ее обозначают через $\Phi(x)$ и определяют следующим образом:

$$\Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-u^2/2\right) du. \qquad (2.17)$$

Посредством простой замены переменных легко показать, что общее выражение (2.16) для нормальной функции распределения вероятностей с использованием (2.17) может быть записано в виде

$$F(x) = \Phi((x - \overline{X})/\sigma). \tag{2.18}$$

Сокращенная таблица значений $\Phi(x)$ дана в приложении Г. Поскольку в таблицах обычно приводят значения функции для неотрицательных x, нередко возникает необходимость в использовании дополнительного соотношения

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x). \tag{2.19}$$

Еще одной функцией, тесно связанной с $\Phi(x)$ и в ряде случаев более удобной, является Q-функция, определяемая как

$$Q(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_x^\infty \exp\left(-u^2/2\right) du, \tag{2.20}$$

и для нее

$$Q(-x) = 1 - Q(x). \tag{2.21}$$

Из сравнения (2.20) с (2.17) ясно, что $Q(x) = 1 - \Phi(x)$. Сравнивая полученный результат с (2.18), найдем

$$F(x) = 1 - Q((x - \overline{X})/\sigma).$$

В приложении Д приведена краткая таблица значений $Q(x)$ для малых x.

В литературе можно встретить различные обозначения для функций $\Phi(x)$ и $Q(x)$. Некоторые авторы используют запись

$$\operatorname{erf}(x) = \Phi(x), \tag{2.22}$$

где $\operatorname{erf}(x)$ — функция ошибок, и

$$\operatorname{erfc}(x) = Q(x), \tag{2.23}$$

где $\operatorname{erfc}(x)$ — обратная функция ошибок. Однако другие авторы определяют функцию ошибок как

$$\operatorname{erf}(x) = \left(2/\pi^{1/2}\right) = \int_0^x \exp\left(-u^2\right) du = 2\Phi\left(\sqrt{2}x\right) - 1. \tag{2.24}$$

Такое различие в способах записи подчеркивает необходимость внимательного изучения определений, встречающихся в литературе.

Несмотря на то что функции $\Phi(x)$ и $Q(x)$ подробно табулированы, лучше использовать $Q(x)$, если таблицы нет под рукой или в нее не включены нужные значения x. Это связано с тем, что существует относительно несложный и достаточно точный метод расчета ее значений при помощи обычного микрокалькулятора.

Процедура такого расчета начинается с представления $Q(x)$ в виде

$$Q(x) = \frac{\exp(-x^2/2)}{(2\pi)^{1/2}} G(x), \tag{2.25}$$

где $G(x)$ — бесконечная дробь, определяемая как

$$G(x) = \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \cfrac{2}{x + \cfrac{3}{x + \cfrac{4}{x + \cdots}}}}} \tag{2.26}$$

Следующий шаг заключается в определении числа членов, которые необходимо использовать для оценки $G(x)$. При большем их количестве точность расчета повышается, но, конечно, увеличивается и его трудоемкость. Правило выбора количества членов будет вскоре сформулировано, а пока примем, что мы уже определили, каким числом членов n нам следует ограничиться. Затем найдем значения величин из следующей последовательности:

$$p_n = x + n/x,$$

$$p_{n-1} = x + (n-1)/p_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_1 = x + 1/p_2,$$

$$G(x) = 1/p_1.$$

Последняя величина и будет искомым значением $G(x)$.

Число членов, необходимых в разложении $G(x)$ для достижения требуемой точности, зависит от величины x, для которой выполняется расчет: чем меньше x, тем больше должно быть n. Общее правило гласит: для получения шести значащих цифр в результирующем значении $G(x)$ произведение xn должно быть не менее 30.

Q-функция используется при нахождении вероятностей очень редко встречающихся событий. Рассмотрим пример, который позволит не только продемонстрировать ее применение, но также пояснит способ вычисления. Предположим, что построенный на интегральной микросхеме триггер переходит от состояния, соответствующего «0», к состоянию «1» каждый раз, когда напряжение на его входе превышает 2,5 В. Пусть нулевому состоянию входного сигнала соответствует напряжение 0,5 В, но к нему добавляется случайный гауссовский шум, дисперсия которого равна 0,2 В^2. Таким образом, входной сигнал триггера может быть представлен в виде гауссовской случайной величины с математиче-

ским ожиданием 0,5 В и дисперсией 0,2 В². Необходимо определить вероятность того, что из-за превышения входным сигналом уровня 2,5 В произойдет ложное срабатывание триггера. Как следует из определения Q-функции, искомая вероятность равна $Q\,[(2{,}5 - 0{,}5)/(0{,}2)^{1/2}] = Q\,(4{,}472)$. Хотя в приложении Д приведено значение функции для этого аргумента, для примера рассчитаем его, используя описанный метод. Вспоминая правило, определим, что $n = 7$. Поэтому

$$p_7 = 4{,}472 + 7/4{,}472 = 6{,}037,$$

$$p_6 = 4{,}472 + 6/6{,}037 = 5{,}466,$$

$$p_5 = 4{,}472 + 5/5{,}466 = 5{,}387,$$

. . . .

$$p_1 = 4{,}472 + 1/4{,}868 = 4{,}677,$$

$$G\,(4{,}472) = 0{,}2138,$$

$$Q\,(4{,}472) = \frac{\exp\,(-\,4{,}472^2/2)}{(2\pi)^{1/2}}\,0{,}2138 = 3{,}872 \cdot 10^{-6}.$$

Обратите внимание, что вероятность ложного срабатывания триггера в любой операции достаточно мала. Однако для всего периода времени работы триггера эта вероятность может быть значительной. Вероятность отсутствия ложных срабатываний равна единице за вычетом вероятности того, что такое срабатывание будет иметь место. Таким образом, при n операциях вероятность ложного срабатывания будет записываться как

$$\text{P (ложное срабатывание)} = 1 - (1 - 3{,}872 \cdot 10^{-6})^n.$$

При $n = 10^5$ P (ложное срабатывание) = 0,321. Рассмотренный пример дает возможность сделать заключение о том, что наличие в цифровой схеме заметного шума рано или поздно приведет к появлению ошибок при ее функционировании.

Хотя многие из наиболее полезных свойств гауссовских случайных величин станут видны только при совместном рассмотрении двух или большего числа таких величин, здесь можно отметить простоту, с которой определяются для них моменты высоких порядков. Центральный момент n-го порядка, вычисленный по выражению (2.11), для гауссовской случайной величины будет равен

$$\overline{(X - \overline{X})^n} = \begin{cases} 0, & \text{для нечетных } n, \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (n-1)\,\sigma^n, & \text{для четных } n. \end{cases} \qquad (2.27)$$

Например, из (2.27) для 4-го центрального момента получим $\overline{(X - \overline{X})^4} = 3\sigma^4$. Однако необходимо сделать предостережение. Начальный момент $\overline{X^n}$ и центральный момент $\overline{(X - \overline{X})^n}$ не всегда

связаны так просто, как для $n = 2$. В частности, для нормального распределения при $n = 4$

$$\overline{X^4} = 3\sigma^4 + 6\sigma^2(\overline{X})^2 + (\overline{X})^4.$$

Прежде чем переходить к дальнейшему рассмотрению, интересно сравнить выражение (2.14) с вероятностью, рассчитываемой по приближенной формуле (1.30) для опытов по схеме Бернулли при больших n. Можно заметить, что по внешнему виду формула Муавра—Лапласа напоминает нормальную плотность распределения вероятностей, если отвлечься от того, что k и n в этой формуле — целые числа, и считать np математическим ожиданием, а npq — дисперсией. Поскольку схема Бернулли связана с дискретным распределением, плотность вероятностей для нее будет представлять собой совокупность дельта-функций, число которых тем больше, чем больше n, и фигура, образуемая ими, при $n \to \infty$ будет приближаться к распределению Гаусса.

Другим важным следствием, тесно связанным с этим, является *центральная предельная теорема*. Эта теорема имеет дело с суммой большого количества независимых случайных величин с одинаковыми плотностями распределения вероятностей. В частности, пусть имеются случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ с одинаковыми математическими ожиданиями m_X и дисперсиями σ_X^2. Определим нормированную сумму как

$$Y = n^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} (X_k - m_X). \tag{2.28}$$

Теорема гласит, что при некоторых условиях, не слишком строгих и выполняющихся почти для любых встречающихся на практике случайных величин, при $n \to \infty$ независимо от вида плотностей распределения вероятностей случайных величин X_k, входящих в сумму, плотность вероятностей случайной величины Y приближается к гауссовской. Кроме того, вследствие нормирования ее математическое ожидание будет равно нулю, а дисперсия — σ_X^2. Теорема справедлива и для более общего случая, однако здесь не имеет смысла рассматривать этот вопрос. Важно осознать, что почти все явления случайного характера, встречающиеся на практике, представляют собой результат наложения множества отдельных событий. Такое замечание справедливо в отношении теплового движения электронов в проводнике, возникновения дробового шума в электронной лампе или транзисторе, атмосферных помех, возмущений среды, волн в океане и многих других физических источников случайных возмущений. Следовательно, независимо от вида плотности вероятностей отдельных составляющих (а очень часто они не известны) можно ожидать, что плотность распределения вероятностей наблюдаемого

возмущения будет нормальной. Центральная предельная теорема дает математическое обоснование для такого предположения, и эксперименты почти всегда подтверждают его правильность.

Упражнение 2.5.1. Математическое ожидание гауссовской случайной величины X равно 1, а дисперсия 16. Найдите вероятность того, что случайная величина X примет

а) отрицательное значение;
б) значение от 1 до 2;
в) значение больше 4.

Ответы: 0,0987; 0,2266, 0,4013.

Упражнение 2.5.2. Для случайной величины X, параметры которой заданы в предыдущем упражнении, найдите:

а) 4-й центральный момент;
б) 4-й начальный момент;
в) 3-й центральный момент;
г) 3-й начальный момент.

Ответы: 0, 49, 768, 865.

2.6. Плотности распределения вероятностей, связанные с гауссовским распределением

В разд. 2.5 были перечислены некоторые из причин, обусловливающих особую важность гауссовского распределения случайной величины. Еще одна причина заключается в том, что множество других плотностей вероятностей, встречающихся на практике, имеют связь с гауссовской и могут быть получены с ее помощью. Некоторые из них и ситуации, где они наблюдаются, будут описаны в этом разделе. Не все они будут введены строгим образом, поскольку в большинстве случаев для этого потребовался бы иной уровень изложения материала, но в целях иллюстрации применяемого метода самые важные получат математическое обоснование.

Плотность распределения вероятностей мощности. Если приложенное к электрической цепи напряжение или текущий через нее ток носят случайный характер, то мощность, рассеиваемая на активном сопротивлении, представляет собой случайную величину, пропорциональную квадрату этого тока или напряжения. Преобразование, выполняемое в таком случае и описанное в разд. 2.3, используется здесь для определения плотности распределения вероятностей, связанной с мощностью случайного напряжения или тока, подчиняющихся нормальному закону. В частности, пусть I — случайная величина, соответствующая значениям тока $I(t_1)$, и пусть ее плотность вероятностей $f_I(i)$ — гауссовская. Тогда мощность W (другая случайная величина) будет записываться как $W = RI^2$ и нужно определить ее плот-

ность распределения вероятностей $f_W(w)$. По аналогии с (2.6) она может быть записана в виде:

$$f_W(w) = \begin{cases} (1/2\,(Rw)^{1/2})\,[f_I\left((w/R)^{1/2}\right) + f_I\left(-(w/R)^{1/2}\right)], & w \geqslant 0, \\ 0, & w < 0. \end{cases} \qquad (2.29)$$

Если величина I имеет нормальную плотность распределения вероятностей с нулевым математическим ожиданием, то

$$f_I(i) = \left(1/(2\pi)^{1/2}\sigma_I\right) \exp\left(-i^2/2\sigma_I^2\right),$$

где σ_I^2 — дисперсия случайной величины I. Следовательно, σ_I — это значение стандартного отклонения тока. Далее, поскольку

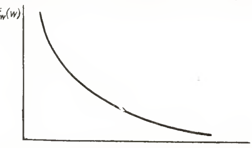


Рис. 2.12. Плотность вероятностей мощности тока, распределенного по нормальному закону.

функция $f_I(i)$ — симметричная, то $f_I(i) = f_I(-i)$. Таким образом, оба члена в (2.29) идентичны, и выражение для плотности вероятностей мощности принимает вид

$$f_W(w) = \begin{cases} \left(1/\sigma_I\,(2\pi Rw)^{1/2}\right) \exp\left(-w/2R\sigma_I^2\right), & w \geqslant 0, \\ 0, & w < 0. \end{cases} \qquad (2.30)$$

График функции $f_W(w)$ показан на рис. 2.12. Отсюда прямо находим, что математическое ожидание мощности есть

$$\overline{W} = E\,[RI^2] = R\sigma_I^2,$$

а ее дисперсия

$$\sigma_W^2 = \overline{W^2} - (\overline{W})^2 = E\,[R^2I^4] - (\overline{W})^2 =$$
$$= 3R^2\sigma_I^4 - \left(R\sigma_I^2\right)^2 = 2R^2\sigma_I^4.$$

Стоит отметить, что при $w = 0$ плотность распределения вероятностей мощности бесконечна, а это значит, что наиболее вероятное значение мощности равно нулю. Это обусловлено тем, что наиболее вероятное значение тока также равно нулю и производная dW/dI в рассматриваемой точке равна нулю. Однако

важно отметить, что плотность вероятностей мощности не содержит дельта-функцию.

Функцию распределения вероятностей мощности можно было бы определить интегрированием соответствующей плотности распределения вероятностей. Однако эта операция не дала бы искомую функцию в виде краткого математического выражения. С другой стороны, функция распределения вероятностей без труда может быть найдена исходя из основного определения. А именно, вероятность того, что мощность не превысит некоторого значения, есть вероятность того, что ток будет находится в пределах от $-(w/R)^{1/2}$ до $+(w/R)^{1/2}$. Таким образом, для тока с нормальным законом распределения, нулевым математическим ожиданием и дисперсией функция распределения вероятностей мощности имеет вид

$$F_W(w) = \begin{cases} \mathrm{P}\left[i \leqslant (w/R)^{1/2}\right] - \mathrm{P}\left[i \leqslant -(w/R)^{1/2}\right] = \Phi\left((w/R)^{1/2}/\sigma_I\right) - \\ - \Phi\left(-(w/R)^{1/2}/\sigma_I\right) = 2\Phi\left((w/R)^{1/2}/\sigma_I\right) - 1, \quad w \geqslant 0, \\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad w < 0. \end{cases}$$

В качестве примера рассмотрим случайный сигнал, который подается на громкоговоритель обычной стереосистемы. Предположим, что сопротивление громкоговорителя равно 4 Ом, а максимально допустимое паспортное значение мощности 25 Вт. Пусть ток, текущий через обмотку звуковой катушки этого громкоговорителя, имеет нормальное распределение и обеспечивает среднюю мощность на громкоговорителе 4 Вт. Какова вероятность превышения паспортного значения мощности? Поскольку мощность 4 Вт на сопротивлении 4 Ом приводит к дисперсии тока $\sigma_I^2 = 1$,

$$\mathrm{P}\,(W > 25) = 1 - F_W\,(25) = 2\,\left[1 - \Phi\,((25/4)^{1/2}/1)\right] = $$
$$= 2\,(1 - 0{,}9798) = 0{,}0404.$$

Это значение вероятности соответствует нескольким превышениям за одну секунду допустимого уровня мощности громкоговорителя. Реальная ситуация даже несколько хуже, поскольку плотность вероятностей музыкального сигнала не подчиняется нормальному закону и он достигает своих пиковых значений чаще, чем при нормальном распределении.

Упражнение 2.6.1. К резистору с сопротивлением 4 Ом приложено напряжение случайного характера, плотность распределения вероятностей которого соответствует нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и стандартным отклонением, равным 10 В. Определите вероятность того, что мощность, рассеиваемая в резисторе,

а) лежит в диапазоне от 9,9 до 10,1 Вт (используйте при расчете функцию распределения вероятностей мощности);

б) превысит 25 Вт;
в) не превысит 10 Вт.
Ответы: 0,00616, 0,3174, 0,472.

Распределение Рэлея. Это распределение встречается в нескольких практических ситуациях. В частности, ниже будет показано, что плотности вероятностей амплитудных значений (т. е. огибающих) узкополосных случайных напряжения или тока, распределенных по нормальному закону, подчиняются рэлеевскому закону. Первоначально эту плотность вероятностей ввел лорд Рэлей в 1880 г. при рассмотрении огибающей суммы ряда гармонических колебаний разной частоты. Она также встречается

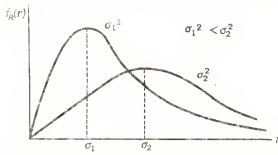


Рис. 2.13. Рэлеевская плотность распределения вероятностей.

при пристрелке пушек, ракет и другого огнестрельного и метательного оружия, если разбросы (отклонения от цели) в каждом из двух взаимно перпендикулярных направлений независимы и распределены по нормальному закону. Таким образом, если начало прямоугольной системы координат считать целью, а разброс по осям обозначить через X и Y, то промах будет выглядеть как $R = (X^2 + Y^2)^{1/2}$. Если X и Y — независимые гауссовские случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковыми дисперсиями σ^2, то плотность вероятностей для R будет записываться в виде

$$f_R(r) = \begin{cases} (r/\sigma^2)\exp(-r^2/2\sigma^2) & r \geqslant 0, \\ 0, & r < 0. \end{cases} \tag{2.31}$$

Это и есть *рэлеевская плотность* распределения вероятностей, график которой для различных значений дисперсии σ^2 показан на рис. 2.13. Обратите внимание на то, что максимум этой функции соответствует стандартному отклонению, и что она несимметрична относительно этого значения.

Математическое ожидание случайной величины, распределенной по закону Рэлея, легко определяется и равно

$$\overline{R} = \int_0^\infty r f_R(r)\,dr = \int_0^\infty (r^2/\sigma^2)\exp(-r^2/2\sigma^2)\,dr = (\pi/2)^{1/2}\sigma,$$

а средний квадрат имеет вид

$$\overline{R^2} = \int_0^\infty r^2 f_R(r)\,dr = \int_0^\infty (r^3/\sigma^2)\exp(-r^2/2\sigma^2)\,dr = 2\sigma^2.$$

При этом дисперсия случайной величины R равна

$$\sigma_R^2 = \overline{R^2} - (\overline{R})^2 = (2-\pi/2)\,\sigma^2 = 0{,}429\sigma^2.$$

Обратите внимание, что полученное значение дисперсии отличается от дисперсии σ^2 гауссовских случайных величин, из которых получена рассматриваемая рэлеевская величина. В отличие от гауссовских случайных величин, для случайной величины, распределенной по закону Рэлея, и математическое ожидание и дисперсия зависят от одного и того же параметра σ^2, в результате чего они не могут изменяться независимо друг от друга.

Функция распределения вероятностей для рэлеевской величины находится непосредственно из соответствующей плотности вероятностей, которая легко интегрируется. Таким образом,

$$F_R(r) = \begin{cases} \int_0^r (u/\sigma^2)\exp(-u^2/2\sigma^2)\,du = 1 - \exp(-r^2/2\sigma^2), & r \geqslant 0, \\ 0, & r < 0. \end{cases} \quad (2.32)$$

Чтобы проиллюстрировать использование распределения Рэлея, рассмотрим стрельбу из лука по мишени диаметром 60,8 см, с центром которой совпадает начало прямоугольной системы координат. Расстояния от него до точек попадания стрел — это случайные величины, имеющие X и Y ортогональные составляющие. Пусть средние квадратические отклонения разброса по абсциссе и ординате одинаковы и равны 7,6 см, т. е., $\sigma_X = \sigma_Y = 7{,}6$ см. Если принять, что случайные величины распределены по нормальному закону, то расстояние от точки попадания стрелы до центра мишени (отклонение разброса) будет случайной величиной с распределением Рэлея, плотность вероятности для которой записывается в виде

$$f_R(r) = (7{,}6)^{-2}\, r \exp[-r^2/2\cdot 7{,}6^2], \quad r \geqslant 0.$$

Используя полученные выше результаты найдем, что математическое ожидание разброса есть $\overline{R} = (\pi/2)^{1/2}\, 7{,}6 \approx 9{,}5$ см, а стандартное отклонение $\sigma_R = (0{,}429 \cdot 7{,}6)^{1/2} \approx 5$ см. При помощи функции распределения вероятностей найдем вероятность непопадания в мишень:

$$\mathrm{P}\,(\text{непопадание в мишень}) = 1 - F_R\,(30{,}4) =$$
$$= 1 - [1 - \exp\,(-30{,}4^2/2 \cdot 7{,}6^2)] = e^{-8} = 3{,}35 \cdot 10^{-4}.$$

Аналогично, приняв диаметр яблочка мишени равным 5,08 см, найдем, что вероятность попадания в него будет

$$\mathrm{P}\,(\text{попадание в яблочко}) = F_R\,(2{,}54) =$$
$$= 1 - \exp\,[2{,}54^2/2 \cdot 7{,}6^2] = 0{,}0540.$$

Очевидно, лучник из этого примера не слишком опытен, хотя почти все его стрелы и попадают в мишень!

Упражнение 2.6.2. Стрелок-любитель стреляет из пистолета в мишень диаметром 20 см. Известно, что вероятность непопадания в мишень при одном выстреле составляет 0,01. Определите математическое ожидание для разброса (относительно центра мишени) по всей серии выстрелов.
Ответ: 4,2 см.

Распределение Максвелла. Одна из задач термодинамики состоит в определении плотности распределения вероятностей скоростей молекул идеального газа. Исходное предположение для нее заключается в том, что каждая составляющая скорости подчиняется нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2 = kT/m$, где k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, а m — масса молекулы. Полная скорость равна

$$V = (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)^{1/2}.$$

Можно показать, что соответствующая плотность распределения вероятностей будет иметь вид

$$f_V\,(v) = \begin{cases} (2/\pi)^{1/2}\,(v^2/\sigma^3)\,\exp\,(-v^2/2\sigma^2), & v \geqslant 0, \\ 0, & v < 0. \end{cases} \qquad (2.33)$$

Это распределение называют *максвелловским*.

Математическое ожидание случайной величины с максвелловским распределением (средняя скорость молекулы) находится как обычно и равно $\overline{V} = (8/\pi)^{1/2}\,\sigma$. Можно показать, что средний квадрат и дисперсия для этого случая будут равны

$$V = 3\sigma^2,\ \ \sigma_V^2 = \overline{V^2} - (\overline{V})^2 = (3 - 8/\pi)\,\sigma^2 = 0{,}453\sigma^2.$$

Зная $\overline{V^2}$, найдем среднюю кинетическую энергию, поскольку $e = mV^2/2$, а, следовательно, $E[e] = m\overline{V^2}/2 = (3/2)m\sigma^2 = (3/2)m(kT/m) = 3kT/2$, что является классическим результатом.

Максвелловское распределение не может быть выражено простым способом через элементарные функции или даже через табулированные функции. Поэтому обычно приходится прибегать к численному интегрированию. Пусть, к примеру, необходимо определить вероятность того, что кинетическая энергия какой-нибудь молекулы превысит более чем в два раза среднее значение энергии, вычисленное по всей совокупности молекул. Поскольку кинетическая энергия равна $e = mV^2/2$, а среднее значение ее есть $(3/2)\, m\sigma^2$, скорость молекулы, энергия которой вдвое и более превышает среднюю, запишется как $V > 6^{1/2}\sigma$. Вероятность того, что скорость молекулы будет находиться в этом интервале, равна

$$\mathrm{P}\,(V > 6^{1/2}\sigma) = \int\limits_{6^{1/2}\sigma}^{\infty} (2/\pi)^{1/2}\,(v^2/\sigma^3)\exp\,(-v^2/2\sigma^2)\,dv.$$

В результате численного интегрирования получим

$$\mathrm{P}\,(e > 2\bar{e}) = \mathrm{P}\,(V > 6^{1/2}\sigma) = 0{,}1128.$$

Упражнение 2.6.3. Известно, что в некотором газе при температуре 300 К число молекул, обладающих скоростями около $1 \cdot 10^3$ м/с, вдвое превышает число молекул, скорости которых примерно равны $5 \cdot 10^3$ м/с. Определите

а) математическое ожидание скорости молекул;

б) массу одной молекулы.

Ответы: 2794,9 м/с, $1{,}35 \cdot 10^{-27}$ г.

Хи-квадратичное распределение. Можно обобщить полученный выше результат, если случайную величину определить как

$$X^2 = Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots + Y_n^2, \tag{2.34}$$

где $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ — независимые гауссовские случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. В этом случае говорят, что случайная величина X^2 имеет *хи-квадратичное распределение с n степенями свободы*, а ее плотность распределения вероятностей

$$f(x^2) = \begin{cases} \dfrac{(x^2)^{n/2-1}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\exp\,(-x^2/2), & x^2 \geqslant 0, \\ 0, & x^2 < 0. \end{cases} \tag{2.35}$$

Если нормировать случайные величины так, чтобы дисперсия была единичной, то рассмотренное выше распределение мощности можно считать хи-квадратичным с $n = 1$. Аналогично, для распределения Рэлея квадрат величины промаха (R^2) можно считать хи-квадратичным с $n = 2$. Распределение Максвелла для квадрата

скорости (V^2) можно считать хи-квадратичным с $n = 3$ и ему можно поставить в соответствие плотность распределения вероятностей энергий молекул.

Математическое ожидание и дисперсия хи-квадратичной случайной величины выражаются в очень простом виде благодаря исходному предположению о единичных дисперсиях компонент. Таким образом:

$$\overline{X^2} = n, \quad (\sigma_{X^2})^2 = 2n.$$

Во многих задачах, связанных с обнаружением сигналов, где по совокупности отсчетов измеряемого напряжения необходимо сделать вывод о наличии или отсутствии сигнала на фоне шумов, часто используется хи-квадратичное распределение. Если напряжение содержит только шумовую составляющую, то совокупность отсчетов имеет нулевое математическое ожидание и к ней применимо хи-квадратичное распределение. Однако, если в нем присутствует и сигнал, математическое ожидание будет отличаться от нуля. Случайная величина, представляющая собой сумму квадратов отсчетов вида (2.34), при этом будет характеризоваться нецентральным хи-квадратичным распределением. Хотя задачи обнаружения сигналов описанного здесь типа и имеют чрезвычайно важное значение, дальнейшее рассмотрение применения соответствующих распределений выходит за рамки настоящей книги.

Упражнение 2.6.4. Пусть каждая из 10 независимых выборок напряжения с нормальным распределением имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию, равную 16 В². Суммированием квадратов этих выборок получают новую случайную величину. Определите ее математическое ожидание и дисперсию.
Ответы: 5120 В⁴, 160 В².

Логарифмически нормальное распределение. Если случайная величина определена как логарифм другой случайной величины, ее распределение будет иметь несколько иную связь с нормальным. Например, в системах связи затухание сигнала при прохождении его по тракту обычно измеряется в неперах и выражается как

$$A = \ln (W_{\text{вых}}/W_{\text{вх}}),$$

где $W_{\text{вых}}$ и $W_{\text{вх}}$ — мощности выходного и входного сигналов соответственно. Из экспериментов известно, что затухание A очень часто ведет себя как случайная величина с нормальным распределением. Отсюда появляется задача определения плотности распределения вероятностей отношения мощностей.

Чтобы получить результат в общем виде, рассмотрим две случайные величины, связанные соотношением $Y = \ln X$, или, что эквивалентно, $X = \exp (Y)$, и предположим, что Y представляет собой гауссовскую случайную величину с математическим

ожиданием $\overline{Y}$ и дисперсией σ_Y^2. Используя (2.5), несложно показать, что плотность распределения вероятностей для X имеет вид

$$f_X(x) = \begin{cases} (1/(2\pi)^{1/2}\sigma_Y x)\exp\left[-(\ln x - \overline{Y})^2/2\sigma_Y^2\right], & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

Это и есть *логарифмически нормальная* плотность распределения вероятностей. В технике чаще используются десятичные логарифмы, но перейти от одних к другим очень просто. На рис. 2.14 показан общий вид графиков логарифмически нормальных плотностей распределения вероятностей.

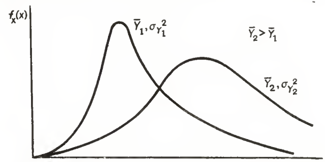


Рис. 2.14. Логарифмически нормальная плотность вероятностей.

Математическое ожидание и дисперсия находятся как обычно и имеют вид

$$\overline{X} = \exp(\overline{Y} + \sigma_Y^2/2),$$

$$\sigma_X^2 = [\exp(\sigma_Y^2) - 1]\exp 2(\overline{Y} + \sigma_Y^2/2).$$

Логарифмически нормальная функция распределения вероятностей не может быть записана через элементарные функции. Если необходимо выполнять расчеты с применением этого распределения, обычно приходится прибегать к численному интегрированию.

Упражнение 2.6.5. Логарифмически нормальное распределение получено из обычного нормального распределения с математическим ожиданием, равным 2, и дисперсией, равной 1.

а) Определите, каково наиболее вероятное значение логарифмически нормального распределения.

б) Решите задачу (*а*), если математическое ожидание нормального распределения равно 4, а дисперсия 6.

Ответы: 2,718, 0,1353.

2.7. Другие плотности распределения вероятностей

Кроме распределений вероятностей, имеющих связь с нормальным, в ходе решения технических задач нередко приходится встречаться и с другими. Некоторые из них будут описаны,

а ситуации, в которых они могут встретиться, — кратко обсуждены.

Равномерное распределение вероятностей. Это распределение уже упоминалось в предыдущем разделе, где использовалось для иллюстрации; теперь мы обобщим наши представления о нем. На практике равномерное распределение встречается тогда, когда среди принимаемых случайными величинами значений нет каких-либо предпочтительных. В частности, обычно считают, что события, происходящие в произвольные моменты времени (например, испускание частиц радиоактивным веществом) с равной вероятностью могут происходить в любой момент времени. Обычно также полагают, что неизвестная фаза гармонического сигнала с равной вероятностью может принимать любое значение в диапазоне 2π радиан. Можно считать, что временно́е положение импульсов, составляющих периодическую последовательность (например, серию импульсов передатчика РЛС), может с равной вероятностью быть любым внутри интервала, равного периоду, если действительное положение этих импульсов относительно момента начала отсчета неизвестно. Некоторые из таких ситуаций будут рассмотрены в приведенных ниже примерах.

В общем виде равномерная плотность распределения вероятностей записывается в виде

$$f(x) = \begin{cases} 1/(x_2 - x_1), & x_1 < x \leqslant x_2, \\ 0, & x \leqslant x_1,\ x > x_2. \end{cases} \tag{2.37}$$

Не составляет труда показать, что

$$\overline{X} = (x_1 + x_2)/2, \tag{2.38}$$

$$\sigma_X^2 = (x_2 - x_1)^2/12. \tag{2.39}$$

Функцию распределения вероятностей такой случайной величины легко получить из плотности вероятностей интегрированием. В результате имеем

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant x_1, \\ (x - x_1)/(x_2 - x_1), & x_1 < x \leqslant x_2, \\ 1, & x > x_2. \end{cases} \tag{2.40}$$

Одно из важных приложений равномерного распределения — описание погрешностей аналого-цифрового преобразования. В ходе этой операции непрерывный сигнал, который в данный момент времени может иметь любое значение, преобразуется в двоичное число с определенным количеством разрядов. Поскольку с помощью ограниченного количества разрядов можно представить только дискретный набор величин, появляется погрешность преобразования, представляющая собой разность между фактическим

значением сигнала и ближайшей дискретной величиной. Процесс аналого-цифрового преобразования поясняется на рис. 2.15. При определении средней квадратической ошибки преобразования предполагают, что она равномерно распределена по интервалу $[-\Delta x/2,\ \Delta x/2]$, где Δx — разность между двумя ближайшими уровнями. Таким образом, из (2.38) получим, что математическое ожидание погрешности равно нулю, а выражение (2.39) приведет к дисперсии, равной $(\Delta x)^2/12$. С плотностью равномерного распределения вероятностей встречаются и при рассмотрении гармонических сигналов со случайной фазой. Например, если гар-

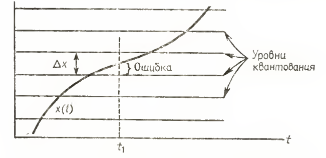


Рис. 2.15. Ошибки аналого-цифрового преобразования.

монический сигнал передается из одного места в другое на некотором расстоянии от первого, то при условии, что длина пути распространения во много раз превышает длину волны сигнала, его фаза в точке приема может с полным основанием считаться случайной. Поскольку трудно указать какую-либо физическую причину, в соответствии с которой нужно было бы одно из значений фазового угла предпочесть другим, обычно предполагают, что фаза распределена равномерно в пределах угла 2π. Для иллюстрации этого положения рассмотрим такой пример: пусть имеется функция времени $x(t) = \cos(\omega t - \theta)$. Будем считать фазовый угол θ случайной величиной с плотностью вероятностей

$$f_{\Theta}(\theta) = \begin{cases} 1/2\pi, & 0 < \theta \leqslant 2\pi, \\ 0, & \theta \leqslant 0,\ \theta > 2\pi. \end{cases}$$

Из проведенного выше анализа равномерного распределения вероятностей ясно, что математическое ожидание Θ будет $\overline{\Theta} = \pi$, а дисперсия $\sigma_\theta^2 = \pi^2/3$. Необходимо отметить, что с равным успехом область существования может быть задана в пределах от $-\pi$ до $+\pi$ или в любых других, лишь бы она охватывала 2π. При любом варианте определения диапазона Θ дисперсия фазы не изменяется, однако математическое ожидание будет различным.

Упражнение 2.7.1. Непрерывный сигнал, который с равной вероятностью может принимать любое значение в диапазоне от —10 до +10 В, преобразуется при помощи аналого-цифрового преобразователя в цифровую форму.

а) Сколько дискретных уровней требуется для того, чтобы средний квадрат ошибки равнялся 0,01 В^2?

б) Если количество дискретных уровней должно равняться целой степени числа 2, чтобы обеспечить эффективное кодирование уровней в виде двоичных чисел, то сколько уровней потребуется, чтобы средний квадрат ошибки преобразования не превысил 0,01 В^2?

в) Чему равен средний квадрат ошибки преобразования при числе уровней, найденном в п. б?

Ответы: 0,003 В^2, 142, 256.

Экспоненциальное и связанные с ним распределения. Как было отмечено при рассмотрении равномерного распределения, события с произвольными моментами наступления часто считаются равновозможными. Таким образом, если средний промежуток вре-

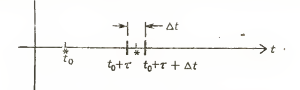


Рис. 2.16. Временной интервал между событиями.

мени между наступлением событий обозначить через $\bar{\tau}$, то вероятность наступления события на интервале Δt, меньшем $\bar{\tau}$, будет равняться просто $\Delta t/\bar{\tau}$, независимо от того, как расположен рассматриваемый интервал. Исходя из такого предположения можно найти функцию распределения вероятностей (а следовательно, и плотность вероятностей) временного интервала между событиями.

Чтобы получить необходимые выражения, рассмотрим рис. 2.16. Пусть событие (звездочка) произошло в момент t_0 и необходимо определить вероятность того, что следующее событие произойдет в произвольный момент времени, расположенный в интервале от $t_0 + \tau$ до $t_0 + \tau + \Delta t$. Обозначая функцию распределения вероятностей случайной величины τ через $F(\tau)$, запишем величину искомой вероятности просто как $F(\tau + \Delta t) - F(\tau)$. Но вероятность того, что событие произойдет в интервале Δt, должна одновременно равняться произведению вероятностей двух независимых событий: «событие не произошло в промежутке от t_0 до $t_0 + \tau$» и «событие произошло в промежутке от $t_0 + \tau$ до $t_0 + \tau + \Delta t$». Поскольку $1 - F(\tau)$ — это вероятность того, что событие не произойдет в интервале между t_0 и $t_0 + \tau$, а $\Delta t/\bar{\tau}$ — вероятность того, что оно произойдет на промежутке Δt, можно записать

$$F(\tau + \Delta t) - F(\tau) = [1 - F(\tau)](\Delta t/\bar{\tau}).$$

Деля обе части полученного выражения на Δt и устремляя Δt к нулю, получим

$$\lim_{\Delta t \to 0} [F(\tau + \Delta t) - F(\tau)]/\Delta t = dF(\tau)/d\tau = [1 - F(\tau)]/\bar{\tau}.$$

Последние два члена образуют дифференциальное уравнение 1-го порядка, решая которое, найдем искомое распределение вероятностей в виде

$$F(\tau) = 1 - \exp(-\tau/\bar{\tau}), \quad \tau \geqslant 0. \tag{2.41}$$

Постоянная интегрирования находится с учетом начального условия $F(0) = 0$, поскольку τ не может быть меньше нуля.

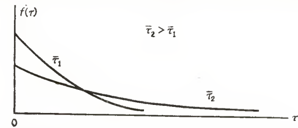


Рис. 2.17. Экспоненциальная плотность распределения вероятностей.

Дифференцируя (2.41), получим выражение для плотности распределения вероятностей временного интервала между событиями. Таким образом,

$$f(\tau) = \begin{cases} (1/\bar{\tau}) \exp(-\tau/\bar{\tau}), & \tau \geqslant 0, \\ 0, & \tau < 0. \end{cases} \tag{2.42}$$

Эта функция называется плотностью *экспоненциального* распределения вероятностей и на рис. 2.17 приведены ее графики для двух различных значений среднего временного интервала.

Как и следовало ожидать, математическое ожидание случайной величины τ будет равно просто $\bar{\tau}$, т. е.,

$$E[\tau] = \int_0^\infty (\tau/\bar{\tau}) \exp(-\tau/\bar{\tau})\, d\tau = \bar{\tau}.$$

Дисперсия при этом оказывается равной $\sigma^2 = (\bar{\tau})^2$. Можно заметить, что плотность экспоненциального распределения вероятностей является однопараметрической (как и функция Рэлея). Таким образом математическое ожидание и дисперсия соответствующего распределения однозначно связаны и один параметр определяется другим.

Для иллюстрации рассмотрим космический аппарат, отказы элементов которого случаются независимо и равномерно, причем

среднее время наработки на отказ составляет 100 дней. Этот аппарат в полностью исправном состоянии отправляется в 200-дневный полет. Какова вероятность того, что он выполнит свою задачу и ни один из его элементов не откажет? Можно поставить этот вопрос по-другому: какова вероятность того, что первый отказ случится не ранее, чем через 200 дней? Ответ на него прост: $[1 - F(200)]$, поскольку $F(200)$ — это вероятность непревышения срока в 200 дней. Следовательно, из (2.41) имеем

$$1 - F(\tau) = 1 - [1 - \exp(-\tau/\bar{\tau})] = \exp(-\tau/\bar{\tau}),$$

и для $\bar{\tau} = 100$, $\tau = 200$ получим

$$1 - F(200) = \exp(-200/100) = 0{,}1352.$$

В качестве еще одного примера рассмотрим ситуацию, где лампа бегущей волны (ЛБВ) используется как усилитель в спутниковой системе связи; предположим, что среднее время наработки ЛБВ на отказ равно четырем годам, т. е. средний срок службы такой ЛБВ составляет 4 года, хотя конкретный образец может проработать больше или меньше. Поскольку реальный срок службы T является случайной величиной с экспоненциальным распределением, можно определить вероятность любого значения T. В частности, вероятность работы ЛБВ после четырех лет эксплуатации есть

$$\mathrm{P}(T > 4) = 1 - F(4) - 1 - [1 - e^{-4/4}] = 0{,}368.$$

Вероятность отказа лампы в первый год ее работы будет

$$\mathrm{P}(T \leqslant 1) = F(1) = 1 - e^{-1/4} = 0{,}221,$$

а вероятность выхода ее из строя в течение 5-го или 6-го годов составит

$$\mathrm{P}(4 < T \leqslant 6) = F(6) - F(4) = (1 - e^{-6/4}) - (1 - e^{-4/4}) = 0{,}1447.$$

Наконец, вероятность того, что ЛБВ проработает 10 лет, оказывается равной

$$\mathrm{P}(T > 10) = 1 - F(10) = 1 - (1 - e^{-10/4}) = 0{,}0821.$$

Случайной величиной в примерах с экспоненциальным распределением является продолжительность временного интервала между следующими друг за другом событиями. Можно обобщить это понятие, рассматривая в качестве случайной величины интервал между некоторым произвольно взятым событием и k-м следующим за ним событием. Функция распределения вероятностей для такой случайной величины называется *распределением Эр-*

ланга, а соответствующая ему плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f_k(\tau) = \begin{cases} \tau^{k-1} \exp(-\tau/\bar{\tau})/(\bar{\tau})^k (k-1)!, & \tau \geqslant 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \\ 0, & \tau < 0. \end{cases} \tag{2.43}$$

Фигурирующую в нем случайную величину называют *эрланговой случайной величиной k-го порядка*. Обратите внимание на то, что экспоненциальное распределение является просто частным случаем распределения Эрланга при $k = 1$. Математическое ожидание и дисперсия в общем случае будут иметь вид $k\bar{\tau}$ и $k(\bar{\tau})^2$ соответственно. Обобщенное распределение Эрланга очень часто применяется при решении технических задач, связанных с определением надежности систем, времени ожидания доступа пользователей в какую-либо систему (например, в телефонную или телеграфную систему связи) и числа каналов, необходимых в системе связи для удовлетворения пользовательских запросов, поступающих в случайные моменты времени и характеризуемых произвольной длиной передаваемых сообщений.

С распределением Эрланга связано также *гамма-распределение*, получаемое из него простой заменой переменных. Пусть $\beta = 1/\bar{\tau}$ и α — непрерывный параметр, равный k для целых значений. Тогда плотность гамма-распределения имеет вид

$$f(\tau) = \begin{cases} [\beta^\alpha \tau^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)] \exp(-\beta\tau), & \tau \geqslant 0, \\ 0, & \tau < 0. \end{cases} \tag{2.44}$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины с этим распределением есть α/β и α/β^2 соответственно.

Упражнение 2.7.2. Известно, что средняя продолжительность службы 100-Вт ламп накаливания составляет 750 ч. Две лампы из одной партии одновременно устанавливают в патроны. Считая сроки службы этих двух ламп независимыми случайными величинами, определите вероятность того, что:

а) обе лампы перегорят не проработав 750 ч,

б) одна из ламп перегорит до истечения 750 ч, а другая — после этого срока,

в) обе лампы проработают дольше 750 ч.

Ответы: 0,1353, 0,2325, 0,3996.

Дельта-распределение. Выше отмечалось, что если возможным событиям удается поставить в соответствие набор дискретных значений, то соответствующая плотность вероятностей будет представлять собой сумму дельта-функций. Этой концепции полезно дать математическое описание, а также продемонстрировать некоторые из ее приложений. Для примера рассмотрим двухуровневый сигнал, показанный на рис. 2.18. С ним часто можно встретиться в различных системах связи или управляющих си-

стемах, поскольку он обладает наибольшей средней мощностью среди всех возможных сигналов с такой амплитудой. Более подробно этот сигнал будет рассматриваться при изучении случайных процессов, а здесь нас интересует отдельная случайная величина $X = x(t_1)$ в заданный момент времени. Она может принимать только два значения: x_1 или x_2 с вероятностью p_1 или p_2 соответственно, причем $p_2 = 1 - p_1$. Таким образом, плотность вероятностей для X есть

$$f(x) = p_1\delta(x - x_1) + p_2\delta(x - x_2). \tag{2.45}$$

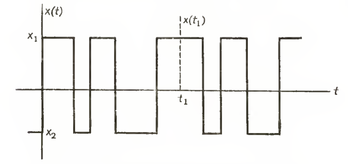


Рис. 2.18. Общий вид двухполярного сигнала.

Математическое ожидание такой случайной величины несложно найти:

$$\overline{X} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,[p_1\delta(x - x_1) + p_2\delta(x - x_2)]\,dx = p_1x_1 + p_2x_2.$$

Средний квадрат аналогично запишется как

$$\overline{X^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,[p_1\delta(x - x_1) + p_2\delta(x - x_2)]\,dx = p_1x^2 + p_2x_2^2.$$

Следовательно, дисперсия равна

$$\sigma_X^2 = \overline{X^2} - (\overline{X})^2 = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 - (p_1x_1 + p_2x_2)^2 = p_1p_2(x_1 - x_2)^2.$$

Чтобы получить окончательную форму этого выражения, воспользовались тем, что $p_2 = 1 - p_1$.

Понятно, что подобные дельта-распределения существуют для случайных величин, принимающих любые значения из бесконечного дискретного набора. Так, если число возможных уровней равно n и они обозначаются как $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а соответствующие

им вероятности $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то плотность вероятностей для них будет иметь вид

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \delta(x - x_i), \tag{2.46}$$

где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Применяя для нахождения математического ожидания тот же, что и ранее, способ, получим

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i,$$

а для среднего квадрата имеем

$$\overline{X^2} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2.$$

Отсюда определим дисперсию

$$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)^2 = {}^1/_2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_i p_j (x_i - x_j)^2.$$

Дельта-распределения для многоуровневых случайных величин часто используются при рассмотрении систем связи и управления и систем, в которых применяется аналого-цифровое преобразование. Обычно количество уровней выражается целой степенью числа 2, так что совокупности уровней удобно поставить в соответствие набор двоичных чисел.

Упражнение 2.7.3. Пусть случайная величина определяется как число выпавших решеток при подбрасывании четырех монет. Найдите:
а) математическое ожидание этой случайной величины,
б) ее дисперсию.
Ответы: 1,0, 2,0.

2.8. Условные функция распределения и плотность распределения вероятностей

Понятие условной вероятности было введено в разд. 1.7 в связи с частотой дискретных событий. Она определялась как вероятность одного события при условии, что произошло другое событие, принадлежащее к тому же самому вероятностному пространству. Желательно распространить это представление на абсолютно непрерывные случайные величины. Обсуждение в настоящем разделе будет ограничено введением определений, а также рассмотрением примеров с одной случайной величиной. Случай двух или больше случайных величин будет анализироваться в гл. 3.

Сначала необходимо дать определение *условной функции распределения вероятностей* случайной величины X при условии,

что произошло событие M. Пусть пока событие M — некоторое произвольное событие. Эта функция распределения обозначается $F(x \mid M)$ и определяется выражением

$$F(x \mid M) = \mathrm{P}[X \leqslant x \mid M] = \mathrm{P}\{X \leqslant x,\ M\}/\mathrm{P}(M),\ \mathrm{P}(M) > 0, \tag{2.47}$$

где $\{X \leqslant x,\ M\}$ — событие, заключающееся в появлении любого из исходов ξ, таких, что $X(\xi) \leqslant x$ и $\xi \in M$, причем $X(\xi)$ — значение случайной величины X, принимаемое ею, если исход опыта есть ξ. Следовательно, $\{X \leqslant x,\ M\}$ является непрерывным аналогом пересечения множеств, фигурировавшего в определении (1.17). Можно доказать, что $F(x \mid M)$ — функция распределения вероятностей, обладающая всеми свойствами, присущими любой функции распределения вероятностей. В частности,

1) $0 \leqslant F(x \mid M) \leqslant 1, \quad -\infty < x \leqslant \infty$,

2) $F(-\infty \mid M) = 0,\ F(\infty \mid M) = 1$,

3) $F(x \mid M)$ не уменьшается при возрастании x;

4) $\mathrm{P}[x_1 < X \leqslant x_2 \mid M] = F(x_2 \mid M) - F(x_1 \mid M) \geqslant 0$ для $x_1 < x_2$.

Теперь необходимо сказать несколько слов о событии M, служащим условием для условной функции распределения вероятностей. Возможны несколько вариантов. В частности:

1) Событие M каким-либо образом может быть связано со случайной величиной X. Соответствующие примеры будут приведены в настоящем разделе.

2) Событие M может зависеть от какой-либо другой дискретной или непрерывной случайной величины. Соответствующие примеры будут приведены в гл. 3.

3) Событие M может одновременно зависеть от случайной величины X и от какой-либо другой случайной величины. Эта ситуация сложнее предыдущих и не будет рассматриваться в настоящей книге.

В качестве примера, поясняющего первый вариант, рассмотрим ситуацию, в которой событие M определяется как $M = \{X \leqslant m\}$. Тогда, как следует из (2.47), условная функция распределения вероятностей может быть записана в виде

$$F(x \mid M) = \mathrm{P}\{X \leqslant x \mid X \leqslant m\} = \mathrm{P}\{X \leqslant x,\ X \leqslant m\}/\mathrm{P}\{X \leqslant m\}.$$

Теперь возможны два варианта в зависимости от того, какая из двух величин — x или m — больше. Если $x \geqslant m$, то при наступлении события $X \leqslant m$ обязательно наступает событие $X \leqslant x$ и $\mathrm{P}\{X \leqslant x,\ X \leqslant m\} = \mathrm{P}\{X \leqslant m\}$. Таким образом,

$$F(x \mid M) = \mathrm{P}\{X \leqslant m\}/\mathrm{P}\{X \leqslant m\} = 1, \quad x \geqslant m.$$

Если же $x \leqslant m$, то при наступлении события $X \leqslant x$ обязательно наступает событие $X \leqslant m$ и

$$F(x \mid M) = \mathrm{P}\{X \leqslant x\}/\mathrm{P}\{X \leqslant m\} = F(x)/F(m).$$

График функции $F(x \mid M)$ показан на рис. 2.19.

Условные функции распределения и плотности вероятностей связаны между собой так же, как и обычные, т. е. если производная существует, то

$$f(x \mid M) = dF(x \mid M)/dx. \tag{2.48}$$

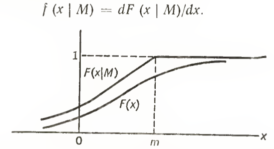


Рис. 2.19. Условная функция распределения вероятностей.

Условная плотность вероятностей обладает всеми свойствами обычной. Следовательно,

1) $f(x \mid M) \geqslant 0, \quad -\infty < x < \infty,$

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x \mid M)\,dx = 1,$

3) $F(x \mid M) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(u \mid M)\,du,$

4) $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x \mid M)\,dx = \mathrm{P}[x_1 < X \leqslant x_2 \mid M].$

Возвращаясь к примеру, иллюстрированному рис. 2.19, запишем условную плотность вероятностей

$$f(x \mid M) = \begin{cases} [1/F(m)]dF(x)/dx = f(x)/F(m) = f(x)/\int\limits_{-\infty}^{m} f(x)\,dx, & x < m, \\ 0, & x \geqslant m, \end{cases}$$

График этой функции показан на рис. 2.20.

Условная плотность вероятностей, как и обычная, может использоваться для определения условных математических ожи-

даний и моментов. В частности, условное математическое ожидание записывается в виде

$$E[X \mid M] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x \mid M)\, dx. \quad (2.49)$$

Более общее выражение для нахождения условного математического ожидания произвольной функции $g(X)$ выглядит следующим образом:

$$E[g(X) \mid M] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x \mid M)\, dx. \quad (2.50)$$

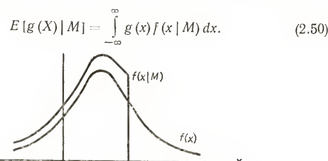


Рис. 2.20. Условная плотность распределения вероятностей, соответствующая рис. 2.19.

В иллюстративных целях примем, что функция $f(x)$ в рассматриваемом примере имеет нормальное распределение, так что ее можно записать в виде

$$f(x) = [(2\pi)^{-1/2} \sigma_X] \exp[-(x - \overline{X})^2 / 2\sigma_X^2].$$

Для простоты будем считать $m = \overline{X}$, и поэтому

$$F(m) = \int_{-\infty}^{m=\overline{X}} [(2\pi)^{-1/2} \sigma_X] \exp[-(x - \overline{X})^2 / 2\sigma_X^2]\, dx = 1/2.$$

Таким образом,

$$f(x \mid M) = \begin{cases} f(x)/(1/2) = [2/(2\pi)^{1/2} \sigma_X] \exp[-(x - \overline{X})^2/2\sigma_X^2], & x < \overline{X}, \\ 0, & x \geqslant \overline{X}. \end{cases}$$

Следовательно, условное математическое ожидание будет

$$E[X \mid M] = \int_{-\infty}^{x} [2x/(2\pi)^{1/2} \sigma_X] \exp[-(x - \overline{X})^2/2\sigma_X^2]\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} [2(u + \overline{X})/(2\pi)^{1/2} \sigma_X] \exp\left(-u^2/2\sigma_X^2\right) du = \overline{X} - (2/\pi)^{1/2} \sigma_X.$$

Поясняя полученный результат, можно сказать, что условное математическое ожидание случайной нормально распределенной величины равно просто $\overline{X} - (2/\pi)^{1/2}\,\sigma_X$, если известно, что принимаемые случайной величиной значения не превосходят ее математического ожидания.

Другим примером, иллюстрирующим введенные математические соотношения, нам послужит рассмотренная выше задача, посвященная стрельбе из лука. Допустим на этот раз, что диаметр мишени равен 30,5 см, а стандартные отклонения разброса в направлениях X и Y равны 10,1 см. Следовательно, математическое ожидание разброса относительно центра мишени, найденное с учетом всех попыток, даже тех, когда стрела пролетела мимо, равно $\overline{R} = 10{,}1\cdot(\pi/2)^{1/2} = 12{,}7$ см. Теперь найдем условное математическое ожидание разброса, считая что стрела попадает в мишень. Следовательно, мы определяем M как событие, заключающееся в том, что разброс R не превышает 15,2 см. Таким образом, условная плотность вероятностей будет записываться как

$$f(r \mid M) = f(r)/F(15{,}2).$$

Поскольку плотность вероятности R есть

$$f(r) = (r/10{,}1^2)\exp(-r^2/2\cdot 10{,}1^2), \quad r \geqslant 0,$$

а вероятность того, что $R \leqslant 15{,}2$ см составляет

$$F(15{,}2) = 1 - \exp[-15{,}2^2/2\cdot 10{,}1^2] = 0{,}675,$$

искомую условную плотность вероятностей получим в виде

$$f(r) = [r/0{,}675\,(10{,}1)^2]\exp[-r^2/2\,(10{,}1)^2], \quad r \geqslant 0.$$

Таким образом, условное математическое ожидание разброса есть

$$E[R \mid M] = \int\limits_0^{15{,}2} (r^2/0{,}675\cdot 10{,}1^2)\exp(-r^2/2\cdot 10{,}1^2)\,dr = 9{,}1 \text{ см},$$

причем этот результат получен численным интегрированием. Обратите внимание на то, что полученное условное математическое ожидание значительно меньше найденного ранее безусловного.

Упражнение 2.8.1. Нормально распределенное случайное напряжение, математическое ожидание которого равно нулю, а стандартное отклонение 10 В, приложено к цепи, состоящей из последовательно соединенных 10-омного резистора и идеального диода. Определите математическое ожидание текущего через эту цепь тока, используя подход, связанный с условной вероятностью.

Ответ: 0,7979 А.

Упражнение 2.8.2. Среднее время безотказной работы лампы бегущей волны составляет 4 года. Считая, что она уже проработала этот срок, найдите условную вероятность ее отказа в течение последующих двух лет службы.

Ответ: 0,3935.

2.9. Примеры и приложения

В предыдущих разделах были введены некоторые понятия, связанные с функцией распределения и плотностью вероятностей непрерывной случайной величины. Прежде чем распространять эти понятия на многомерные распределения случайных величин, полезно рассмотреть ряд примеров, иллюстрирующих приложения к несложным техническим задачам.

Вначале рассмотрим простую схему стабилизатора напряжения, показанную на рис. 2.21, *а*. Входящий в ее состав стабилитрон имеет идеальную вольт-амперную характеристику, изобра-

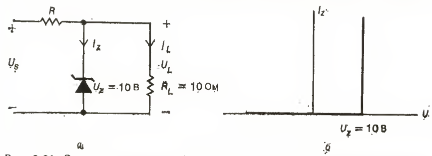


Рис. 2.21. Электрическая схема (*а*) и вольт-амперная характеристика стабилитрона (*б*) стабилизатора напряжения.

женную на рис. 2.21, *б*. Обратите внимание на то, что пока напряжение не сравняется с пробойным ($U_Z = 10$ В), ток через стабилитрон остается равным нулю, а после этого его величина определяется параметрами остальных элементов схемы, тогда как напряжение на стабилитроне остается постоянным. Такая схема часто используется для защиты полупроводниковых приборов от превышения допустимого напряжения. Например, в качестве сопротивления R_L, показанного в схеме, может служить сопротивление нагрузки в виде транзисторного усилителя, работающего при напряжении питания 9 В, но выходящего из строя при превышении уровня 10 В. Номинальное выходное напряжение U_S источника питания помимо постоянной составляющей, равной 12 В, содержит случайные пульсации треугольной формы, в связи с чем его можно рассматривать как случайную величину. Будем считать, что эта величина равномерно распределена в диапазоне от 9 до 15 В.

Стабилитроны характеризуются не только пробойным напряжением, но и допустимой мощностью рассеяния. Предположим, что средняя допустимая мощность рассеяния стабилитрона есть $W_Z = 3$ Вт. Каким должно быть сопротивление R последовательного резистора, чтобы средняя мощность рассеяния не превышала указанного значения?

Если стабилитрон открыт, то приложенное к нему напряжение есть $U_Z = 10$ В, а протекающий через него ток I_Z при токе нагрузки $I_L = 1$ А и сопротивлении $R_L = 10$ Ом есть $I_Z = (U_S - U_Z)/R - I_L$, $U_S > U_Z (R + R_L)/R_L = 10 (R + 10)/10$. Мощность, рассеиваемая в стабилитроне, равна

$$W_Z = U_Z I_Z = U_Z (U_S - U_Z)/R - I_L U_Z = [(10U_S - 100)/R] - 10, \quad U_S > R + 10.$$

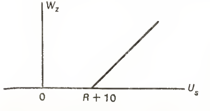
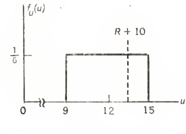


Рис. 2.22. Зависимость мощности, рассеивающейся на стабилитроне, от напряжения источника питания.

Зависимость мощности от напряжения источника U_S показана на рис. 2.22, а графики плотности распределения вероятностей U_S и W_Z — на рис. 2.23. Обратите внимание на то, что в плотности вероятностей мощности при $w=0$ имеется дельта-компонента, поскольку большую часть времени стабилитрон находится в непроводящем состоянии, однако для значений $w > 0$ она равномерна, так как W_Z и U_S в этом диапазоне связаны линейно. Путем преобразования плотности вероятностей (см. разд. 2.3) легко показать, что

$$f_W(w) = \begin{cases} F_U(R + 10)\,\delta(w) + (R/10) f_U((Rw/10) + R + 10), & 0 \leqslant w \leqslant (50/R) - 10, \\ 0, & w < 0, \quad w > (50/R) - 10. \end{cases}$$



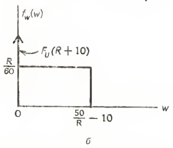


Рис. 2.23. Плотности вероятностей напряжения источника питания (*а*) и рассеиваемой на стабилитроне мощности (*б*).

где F_U — функция распределения U_S. Следовательно, площадь дельта-функции соответствует вероятности того, что напряжение U_S источника питания меньше начального напряжения источника, при котором стабилитрон начинает проводить.

Математическое ожидание рассеиваемой на стабилитроне мощности записывается как

$$E[W_Z] = \overline{W}_Z = \int_{-\infty}^{\infty} w f_W(w)\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} w F_U(R+10)\,\delta(w)\,dw +$$

$$+ \int_{0}^{\infty} w\,(R/10)\,f_U\,[(Rw/10) + R + 10]\,dw.$$

Первый интеграл в правой части равен нулю (поскольку дельта-функция существует только при $w = 0$), а второй можно переписать, используя равномерную плотность распределения вероятностей $f_U(u) = 1/6,\ 9 < u \leqslant 15$, в форме

$$\overline{W}_Z = \int_{0}^{(50/R)-10} w\,(R/10)\,(1/6)\,dw =$$

$$= (5 - R)^2/1{,}2R.$$

Рис. 2.24. Выбор токозадающего сопротивления вольтметра.

Поскольку математическое ожидание мощности, рассеиваемой на стабилитроне, не должно превышать 3 Вт, $(5-R)^2/1{,}2R \leqslant 3,\ 0 < R \leqslant 5$, откуда $R \geqslant 2{,}19$ Ом. Теперь можно сделать заключение о том, что любое R больше 2,19 Ом удовлетворяет принятому условию непревышения рассеиваемой мощностью уровня 3 Вт. Конкретно же величина R может быть определена из требуемого выходного напряжения при номинальном напряжении источника питания 12 В. Если выходное напряжение должно быть равно 9 В (как было принято выше), то $R = 3/(9/10) = 3{,}33$ Ом, что превышает минимальное значение 2,19 Ом и, следовательно, удовлетворяет условию задачи.

Другим примером нам послужит задача, связанная с выбором токозадающего сопротивления вольтметра постоянного тока, схема которого показана на рис. 2.24. Будем считать, что ток полного отклонения стрелки микроамперметра составляет 100 мкА, а активное сопротивление катушки 1000 Ом. Чему равно токозадающее сопротивление, при котором полное отклонение стрелки прибора соответствовало бы уровню измеряемого напряжения 10В? Итак, искомое номинальное сопротивление (обозначим его R^*) будет

$$R^* = (10/10^{-4}) - 1000 = 9{,}9 \cdot 10^4 \text{ Ом}.$$

Пусть реально используемый резистор берется наугад из коробки, где находятся резисторы с маркировкой «100 кОм». Из-за производственных допусков реальное сопротивление этих рези-

сторов представляет собой случайную величину с математическим ожиданием 100 кОм и стандартным отклонением 1 кОм. Предположим также, что эта случайная величина имеет нормальное распределение (такое предположение обычно выдвигается, когда отклонения случайной величины от ее среднего значения невелики, хотя для величин, которые могут принимать, как и рассматриваемое активное сопротивление, только положительные значения, такое предположение, строго говоря, не совсем справедливо). Определим вероятность того, что точность показаний вольтметра не будет хуже 2 %.[6])

Минимальное приемлемое значение сопротивления резистора равно

$$R_{\min} = [(10 - 0{,}2)/10^{-4}] - 1000 = 9{,}7 \cdot 10^4 \text{ Ом},$$

а соответствующее максимальное —

$$R_{\max} = [(10 + 0{,}2)/10^{-4}] - 1000 = 10{,}1 \cdot 10^4 \text{ Ом}.$$

Вероятность случайного выбора резистора, сопротивление которого будет находиться в диапазоне, ограниченном этими значениями, есть

$$P_C = P(9{,}7 \cdot 10^4 < R \leqslant 10{,}1 \cdot 10^4) = \int_{9{,}7 \cdot 10^4}^{10{,}1 \cdot 10^4} f_R(r)\, dr, \qquad (2.51)$$

где $f_R(r)$ — нормальная плотность распределения вероятностей для R, задаваемая выражением

$$f_R(r) = [1/(2\pi)^{1/2} \cdot 1000] \exp[-(r - 10^5)^2/2 \cdot 10^6].$$

Интеграл в (2.51) может быть выражен через нормированную нормальную функцию распределения Φ, как показано в разд. 2.5. Поэтому

$$P_C = \Phi[(10{,}1 \cdot 10^4 - 10^5)/10^3] - \Phi[(9{,}7 \cdot 10^4 - 10^5)/10^3] =$$
$$= \Phi(1) - \Phi(-3) = \Phi(1) - [1 - \Phi(3)].$$

Используя таблицы приложения Г, получим

$$P_C = 0{,}8413 - [1 - 0{,}9987] = 0{,}8400.$$

Итак оказывается, что, даже если резисторы берутся из партии, в которой сопротивления отличаются от номинальных, вероятность того, что точность прибора будет лежать в заданных пределах, все равно остается большой.

Еще один пример посвящен приложению понятий условной вероятности. Рассмотрим измерительную систему для транспортного потока, определяющую скорость каждого автомобиля на

---

[6]) Т. е. ошибка в показаниях вольтметра из-за разброса сопротивлений резисторов не будет превосходить 1/50 от максимального показания шкалы прибора.

автостраде и регистрирующую те, скорость которых превышает заданный предел, равный 70 км/ч. Определим математическое ожидание превышения скорости в предположении, что она подчиняется распределению Рэлея с наиболее вероятным значением 50 км/ч. Это эквивалентно нахождению условного математического ожидания скорости автомобиля при условии, что произошло превышение указанного предела, с последующим вычитанием его из найденного значения.

Обозначая скорость через V, запишем искомую условную функцию распределения вероятностей как

$$F[v \mid V > 70] = \mathrm{P}\{V \leqslant v,\ V > 70\}/\mathrm{P}\{V > 70\}. \qquad (2.52)$$

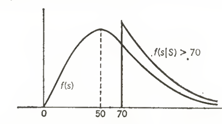


Рис. 2.25. Условная и обычная рэлеевские плотности распределения вероятностей.

Поскольку числитель этого выражения отличен от нуля только при $v > 70$, оно может быть переписано в виде:

$$F[v \mid V > 70] = \begin{cases} 0, & v \leqslant 70, \\ [F(v) - F(70)]/[1 - F(70)], & v > 70, \end{cases} \qquad (2.53)$$

где $F(v)$ — функция распределения вероятностей случайной величины V. Числитель дроби в выражении (2.53) — это вероятность события $\{v < V \leqslant 70\}$, а знаменатель — $\{V > 70\}$.

Дифференцируя (2.53) по v, найдем искомую условную плотность вероятностей

$$f(v \mid V > 70) = \begin{cases} 0, & v \leqslant 70, \\ f(v)/[1 - F(70)], & v > 70, \end{cases}$$

где $f(v)$ — плотность вероятностей распределения Рэлея, имеющая вид

$$f(v) = \begin{cases} (v/50^2)\exp(-v^2/2\cdot 50^2), & v \geqslant 0, \\ 0, & v < 0. \end{cases} \qquad (2.54)$$

Графики этих двух функций представлены на рис. 2.25.

Величина $F(70)$ легко определяется из (2.54):

$$F(70) = \int\limits_0^{70} (v/50^2)\exp(-v^2/2\cdot 50^2)\,dv = 1 - \exp(-49/50).$$

Следовательно,

$$1 - F(70) = \exp(-49/50).$$

Условное математическое ожидание есть

$$E[V \mid V > 112] = [\exp(-49/50)] \int_{112}^{\infty} (v^2/50^2) \exp(-v^2/2 \cdot 50^2)\, dv =$$

$$= 70 + 50(2\pi)^{1/2} [\exp(49/50)] [1 - \Phi(7/5)] = 70 + 27{,}2 \text{ км/ч}.$$

Итак, условное математическое ожидание превышения скорости равно 27,2 км/ч. Хотя из полученного результата понятно, что рэлеевская модель не очень хорошо подходит для рассматриваемой ситуации (поскольку превышение скорости на 27,2 км/ч слишком велико для реальности), приведенный пример дает представление о способе, обычно применяемом при определении условных моментов.

В последнем примере совместно рассматриваются концепции дискретной вероятности и непрерывных случайных величин в приложении к задачам, с которыми приходится сталкиваться при разработке спутниковых систем связи. В такой системе обычно используются несколько ламп бегущей волны, установленных на борту спутника, чтобы обеспечить работу на нескольких каналах, а также удлинить срок службы системы путем повышения надежности на случай выхода из строя части установленных ЛБВ. Предположим, что на спутнике должно использоваться 6 ЛБВ и нужно, чтобы после 5 лет службы вероятность исправной работы хотя бы одной ЛБВ составляла 0,95. Таким образом, нужно определить среднее время наработки на отказ для одной ЛБВ, позволяющее достичь заданной степени надежности. Для этого необходимо воспользоваться некоторыми результатами рассмотрения в разд. 1.10 схемы Бернулли. Пусть в нашем случае k — количество исправных ЛБВ в произвольный момент времени, а p — вероятность исправности любой ЛБВ. Поскольку требуется, чтобы вероятность того, что исправна хотя бы одна лампа, равнялась 0,95, то $\mathrm{P}(k \geqslant 1) = 0{,}95$ или

$$\sum_{k=1}^{6} p_6(k) = 1 - p_6(0) = 1 - \binom{6}{0} p^0 (1-p)^6 = 0{,}95.$$

Решив последнее уравнение, получим, что $p = 0{,}393$. Если сделать обычное предположение об экспоненциальном законе распределения срока τ службы любой из ЛБВ, то

$$\int_{5}^{\infty} (1/\bar{T}) \exp(-\tau/\bar{T})\, d\tau = 0{,}393, \quad \bar{T} = 5{,}353.$$

Таким образом, чтобы обеспечить необходимую надежность, среднее время наработки на отказ для каждой из ЛБВ должно превышать 5,353 года.

Можно поставить еще один вопрос: сколько ЛБВ нужно, чтобы вероятность того, что после 5 лет эксплуатации хотя бы одна из них будет функционировать, равнялась 0,99? Здесь неизвестно число n, но для ЛБВ с той же средней наработкой на отказ значение p остается прежним и равным 0,393. Поэтому

$$1 - p_n(0) = 0{,}99, \qquad \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n = 0{,}01.$$

В результате получим, что $n = 9{,}22$. Однако поскольку это число должно быть целым, то для достижения заданного уровня надежности необходимо установить не менее 10 ламп.

Упражнение 2.9.1. Вольт-амперная характеристика полупроводникового диода часто описывается уравнением Шокли

$$I = I_0 [\exp(\eta U) - 1],$$

где U — напряжение, приложенное к диоду, I_0 — обратный ток, η — постоянная, зависящая от параметров реального диода, I — ток, протекающий через диод. Пусть $I_0 = 10^{-6}$, а $\eta = 25$. Определите математическое ожидание тока через диод, считая приложенное к нему напряжение случайной величиной, которая

а) равномерно распределена в интервале от 0 до 1;

б) нормально распределена с нулевым математическим ожиданием и дисперсией 0,07;

в) нормально распределена с нулевым математическим ожиданием и дисперсией 0,1.

Поясните полученные результаты.

Ответы: 2,880, 3,163, 37,299.

Упражнение 2.9.2. Напряжение холостого хода эквивалентного источника питания составляет 18 В, а его внутреннее сопротивление представляет собой случайную величину, равномерно распределенную в интервале от 4 до 16 Ом. Найдите:

а) сопротивление нагрузки, которая должна быть подключена к этому источнику с тем, чтобы получить на ней максимально возможное рассеяние мощности;

б) математическое ожидание мощности.

Ответы: 7,5 Ом, 9,2 Вт.

ЗАДАЧИ

2.1.1. Для каждой из описанных ниже ситуаций перечислите все величины, которые обоснованно можно считать случайными; укажите, являются ли они непрерывными или дискретными, а также определите для всех этих величин допустимые интервалы принимаемых ими значений.

а) Прогноз погоды на 4 июля выглядит следующим образом: температура от 19 до 29 °С, скорость ветра 3,5 м/с, относительная влажность 75 %, восход Солнца в 5 ч 05 мин, заход в 20 ч 45 мин.

б) Изучение движения на оживленной улице показало следующее: количество проходящих за 1 мин автомобилей равно 26, их средняя скорость 56 км/ч, число легковых автомобилей превосходит в 6,81 раза число грузовых, средняя масса автомобиля 1800 кг, число дорожных происшествий за день 5.

в) В электронную схему входят 5 микросхем, 12 светодиодов, 43 резистора и 12 конденсаторов. Все резисторы имеют номинальное сопротивление

1000 Ом, конденсаторы — номинальную емкость 0,01 мкФ, а номинальное напряжение источника питания равно 5 В.

2.1.2. Укажите для каждой из перечисленных ниже случайных величин, дискретна она или непрерывна, а также назовите диапазоны принимаемых ими значений.

а) Исходы опыта с бросанием пары игральных костей.

б) Результаты, полученные при измерении напряжения 12-вольтового аккумулятора.

в) Исходы, связанные со случайным выбором номера телефона из абонентского справочника.

г) Результаты взвешивания взрослых мужчин.

2.2.1. Пусть опыт заключается в бросании 10 монет и определении числа выпавших решеток. Будем считать это число случайной величиной X.

а) Постройте для этой случайной величины график функции распределения.

б) Какова вероятность того, что случайная величина X примет одно из следующих значений: 6, 7, 8, 9?

в) Какова вероятность того, что данная случайная величина будет больше или равна 8?

2.2.2. Функция распределения вероятностей случайной величины X имеет вид

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leqslant -1, \\ 0{,}5 + 0{,}5x, & -1 < x < 1, \\ 0, & 1 \leqslant x < \infty. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что

а) $X = 1/4$, б) $X > 3/4$, в) $-0{,}5 < X \leqslant 0{,}5$.

2.2.3. Функция распределения вероятностей случайной величины X имеет вид

$$F_X(x) = \begin{cases} A\{1 - \exp[-(x-1)]\}, & 1 < x < \infty, \\ 0, & -\infty < x \leqslant 1. \end{cases}$$

а) При каком значении A эта функция действительно может считаться функцией распределения вероятностей?

б) Чему равно $F_X(2)$?

в) Какова вероятность того, что $2 < X < \infty$?

г) Какова вероятность того, что $1 < X \leqslant 3$?

2.2.4. Функция распределения вероятностей случайной величины X имеет вид

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leqslant -2, \\ A(1 + \cos bx), & -2 < x \leqslant 2, \\ 1, & 2 < x < \infty. \end{cases}$$

а) При каких значениях A и b эту функцию действительно можно считать функцией распределения вероятностей?

б) Какова вероятность того, что $X > 1$?

в) Какова вероятность того, что $X < 0$?

2.3.1. а) Найдите плотность распределения вероятностей случайной величины, описанной в задаче 2.2.1, и нарисуйте ее график.

б) Используя плотность распределения вероятностей, определите вероятность того, что случайная величина примет значение в интервале от 4 до 7.

в) Используя плотность распределения вероятностей, определите вероятность того, что случайная величина примет значение меньше 4.

2.3.2. а) Найдите плотность распределения вероятностей случайной величины X, описанной в задаче 2.2.3, и нарисуйте ее график.

б) Используя плотность распределения вероятностей, найдите вероятность того, что случайная величина X лежит в интервале от 2 до 3.

в) Вычислите вероятность того, что случайная величина примет значение меньше 2.

2.3.3. Плотность вероятностей случайной величины X имеет вид

$$f_X(x) = \exp(-2|x|), \qquad -\infty < x < \infty.$$

Случайная величина Y связана с X соотношением $Y = X^2$.

а) Определите плотность распределения вероятностей случайной величины Y.

б) Определите вероятность того, что $Y > 2$.

2.3.4. Случайная величина Y связана со случайной величиной X, введенной в задаче 2.3.3, соотношением $Y = 3X - 4$.

а) Определите плотность распределения вероятностей случайной величины Y.

б) Определите вероятность того, что $Y < 0$.

в) Вычислите вероятность того, что $Y > X$.

2.4.1. Для случайной величины X из задачи 2.3.2 определите:

а) математическое ожидание,

б) средний квадрат,

в) дисперсию.

2.4.2. Для случайной величины X из задачи 2.2.4 определите:

а) математическое ожидание,

б) средний квадрат,

в) третий центральный момент,

г) дисперсию.

2.4.3. Плотность распределения вероятностей случайной величины Y имеет вид

$$f(y) = \begin{cases} Ky, & 0 < y \leqslant 6, \\ 0, & y \leqslant 0, \quad y > 6. \end{cases}$$

Определите для этой величины:

а) при каком значении K эту функцию действительно можно считать плотностью распределения вероятностей,

б) математическое ожидание $\overline{Y}$,

в) средний квадрат $\overline{Y^2}$,

г) дисперсию σ_Y^2,

д) третий центральный момент,

е) n-й начальный момент $E[Y^n]$.

2.4.4. К источнику питания могут подключаться на некоторые промежутки времени в произвольном сочетании любые из пяти нагрузок, каждая из которых рассеивает мощность 10 Вт. При этом каждая из них подключена к источнику лишь на одну четвертую часть всего времени его работы и действует независимо от остальных.

а) Определите среднюю мощность, потребляемую нагрузками от источника.

б) Определите дисперсию мощности, потребляемой нагрузками от источника.

в) Если источник может обеспечить только 40 Вт, то какова вероятность его перегрузки?

2.5.1. Математическое ожидание и дисперсия случайного напряжения с нормальным распределением равны 10 В и 25 В^2 соответственно. Какова вероятность того, что измеренное значение напряжения

а) будет больше 0?

б) будет находиться в интервале от 0 до математического ожидания?

в) будет в два раза больше математического ожидания?

2.5.2. Для случайной величины из задачи 2.5.1 определите:

а) 4-й центральный момент,

б) 4-й начальный момент,

в) 3-й центральный момент,

г) 3-й начальный момент.

2.5.3. Вероятность того, что случайный ток с нормальным распределением примет значение $\leqslant 1$ составляет 0,5. Кроме того, вероятность превышения им уровня 5,0 составляет 0,0228.

Определите для этой случайной величины:

а) математическое ожидание,

б) дисперсию,

в) вероятность того, что она примет значение, меньшее или равное 3,0.

2.5.4. Широко распространенный метод обнаружения сигнала в присутствии шума заключается в установлении определенного порогового уровня, с которым производится сравнение результатов измерения напряжения, включающего полезный сигнал и шум. Если установленный порог превышается, то считают, что полезный сигнал присутствует. Естественно, иногда и при отсутствии сигнала шум превосходит этот порог, и такая ситуация называется *ложной тревогой*. Желательно, чтобы вероятность ложной тревоги была ничтожно мала. В то же время необходимо, чтобы результат любого измерения, проведенного при наличии сигнала, смешанного с шумом, с большой вероятностью превосходил установленный порог. Она называется *вероятностью правильного обнаружения* и должна как можно меньше отличаться от 1. Пусть шум характеризуется нормальным распределением с нулевым математическим ожиданием и дисперсией 1 $В^2$, а установленный порог равен 5 В.

а) Определите вероятность ложной тревоги.

б) Определите вероятность правильного обнаружения сигнала величиной 8 В в присутствии шума с заданными выше параметрами.

2.6.1. Через резистор с сопротивлением 3 Ом протекает случайный нормально распределенный ток с нулевым математическим ожиданием и дисперсией 4 $А^2$. Определите:

а) математическое ожидание рассеиваемой мощности,

б) дисперсию рассеиваемой мощности,

в) вероятность того, что мгновенная рассеиваемая мощность будет больше 36 Вт.

2.6.2. Случайная величина X характеризуется нормальным законом распределения с нулевым математическим ожиданием и дисперсией 1,0. Случайная величина Y связана с ней соотношением $Y = X^3$.

а) Запишите выражение для плотности распределения вероятностей случайной величины Y.

б) Определите математическое ожидание величины Y.

в) Определите дисперсию величины Y.

2.6.3. Случайный ток с рэлеевской плотностью вероятностей протекает через резистор с сопротивлением 2π Ом. Математическое ожидание тока равно 2 А. Определите:

а) математическое ожидание рассеиваемой на резисторе мощности,

б) вероятность того, что рассеиваемая мощность будет меньше или равна 12 Вт,

в) вероятность того, что рассеиваемая мощность превысит 72 Вт.

2.6.4. Проекции скоростей катящихся по плоской поверхности мраморных шариков на взаимно перпендикулярные направления представляют собой случайные величины с нормальным распределением, нулевым математическим ожиданием и стандартным отклонением, равным 0,9 м/с. Определите:

а) наиболее вероятную скорость шариков,

б) математическое ожидание их скорости,

в) вероятность того, что скорость шарика превысит 3 м/с.

2.6.5. Средняя скорость молекулы азота в воздухе при температуре 20° составляет около 500 м/с. Определите:

а) дисперсию скорости молекулы,

б) наиболее вероятную скорость молекулы,

в) среднее квадратическое отклонение скорости молекулы.

2.6.6. Проведено пять измерений случайного напряжения с нормальным распределением, нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, после чего из суммы квадратов полученных значений была образована новая случайная величина $Y = X^2$. Определите:

а) математическое ожидание случайной величины Y,

б) ее дисперсию,

в) наиболее вероятное значение этой случайной величины.

2.6.7. При использовании логарифмически нормальной плотности распределения вероятностей единицу измерения «децибелы» применяют чаще, чем «неперы». При этом нормально распределенная величина Y связана со случайной величиной X, распределенной по логарифмически нормальному закону, соотношением $Y = 10 \lg X$.

а) Запишите для величины X плотность вероятностей.

б) Определите ее математическое ожидание.

в) Запишите выражение для дисперсии X.

2.7.1. Случайная величина Θ равномерно распределена на интервале от 0 до 2π. Случайная величина X связана с ней соотношением $X = \cos \Theta$.

а) Запишите выражение для плотности распределения вероятностей случайной величины X.

б) Определите ее математическое ожидание.

в) Вычислите дисперсию.

г) Найдите вероятность того, что $X > 0{,}5$.

2.7.2. Непрерывное случайное напряжение, принимающее значения в диапазоне от -10 до $+10$ В, необходимо подвергнуть квантованию для представления его в виде последовательности двоичных чисел.

а) Определите минимальное число уровней квантования, необходимых для получения средней квадратической ошибки преобразования, меньшей 0,01 максимального значения этого напряжения.

б) Определите минимальное число уровней квантования, при котором обеспечивается выполнение требований предыдущего пункта, если оно должно представлять собой целую степень числа 2.

в) Сколько двоичных разрядов необходимо для представления всех уровней квантования?

2.7.3. Разрабатываемый спутник связи должен характеризоваться средним временем наработки на отказ 5 лет. Считая реальное время наработки на отказ случайной экспоненциально распределенной величиной, определите вероятность того, что

а) спутник проработает менее 5 лет,

б) спутник проработает не менее 10 лет

в) спутник откажет в течение 6-го года.

2.7.4. Некий квартиросъемщик купил четыре лампочки накаливания со средним сроком службы 1000 ч. Одну из них он установил в настольную лампу, а остальные оставил про запас, на случай, если лампа перегорит. Определите:

а) ожидаемую суммарную продолжительность службы четырех ламп,

б) вероятность того, что четыре лампы в сумме проработают 5000 часов или более,

в) вероятность того, что общий срок службы всех ламп не превысит 2000 часов.

2.7.5. Имеется непрерывный случайный сигнал, равномерно распределенный на интервале от -8 до $+8$ В. Этот сигнал подвергается квантованию для преобразования в восемь равноотстоящих друг от друга уровней, расположенных в диапазоне от -7 до $+7$ В.

а) Напишите выражение для плотности распределения вероятностей дискретной случайной величины, представляющей одну выборку в некоторый момент времени.

б) Определите математическое ожидание этой случайной величины.

в) Определите дисперсию этой случайиой величины.

2.8.1. а) Для спутниковой системы связи, описанной в задаче 2.7.3, определите условную вероятность того, что спутник прослужит 10 лет или более при условии, что он уже отработал 5 лет.

б) Определите условный средний срок службы этой системы при условии, что она уже проработала 3 года.

2.8.2. а) Для случайной величины X из задачи 2.7.1 определите условную плотность распределения вероятностей $f(x \mid M)$, где M — событие $\{0 \leqslant \Theta \leqslant \pi/2\}$. Постройте график.

б) При том же M определите условное математическое ожидание $E[X \mid M]$.

2.8.3. При стрельбе из лазерной пушки по круглой мишени диаметром 2 м обнаружено, что при каждом десятом выстреле поражения мишени не произошло.

а) Определите для случаев попадания в мишень вероятность того, что разброс относительно центра мишени не превысит 0,3 м.

б) Определите для случаев промаха вероятность того, что величина промаха от ее края не превысит 0,5 м.

2.8.4. Обратитесь еще раз к пороговой системе обнаружения, описанной в задаче 2.5.4.

а) Определите условное математическое ожидание шума, превосходящего пороговый уровень, если сигнал отсутствует.

б) Выполните задание предыдущего пункта, считая, что присутствует полезный сигнал, параметры которого указаны в задаче 2.5.4.

2.9.1. Углы отклонения стрелки индикаторов для различных типов вольтметров переменного тока пропорциональны разным параметрам измеряемых сигналов. Однако чаще всего шкала вольтметра калибруется так, чтобы его показания соответствовали эффективному значению синусоидального сигнала. Для сигналов другой формы такого соответствия может и не быть. Предположим, что с помощью приборов, характеристики которых приведены ниже, измеряется случайное напряжение с нормальным распределением, нулевым математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением 10 В. Определите показания прибора, в котором угол отклонения стрелки пропорционален

а) математическому ожиданию выходного сигнала, полученного в результате двухполупериодного выпрямления входного сигнала; в данном случае, если на прибор поступает сигнал $X(t)$, то угол отклонения стрелки пропорционален величине $E[|X(t)|]$,

б) математическому ожиданию огибающей сигнала; учтите, что огибающая сигнала с нормальным распределением характеризуется распределением Рэлея.

2.9.2. Распределение амплитуд отраженных импульсов РЛС подчиняется закону Рэлея. Допустим, что их математическое ожидание равно $(\pi/2)^{1/2}$. Однако для устранения воздействия на систему шума на экране индикатора отображаются только те импульсы, амплитуда R которых превышает некоторое пороговое значение r_0.

а) Запишите плотность вероятностей для отображаемых на экране импульсов, т. е. найдите $f(r \mid R > r_0)$. Нарисуйте график этой функции.

б) Найдите условное математическое ожидание для регистрируемых импульсов, приняв $r_0 = 0{,}5$.

2.9.3. Амплитудная характеристика ограничителя имеет вид

$$U_{\text{вых}} = \begin{cases} -B, & U_{\text{вх}} \leqslant -A, \\ BU_{\text{вх}}/A, & -A < U_{\text{вх}} \leqslant A, \\ B, & U_{\text{вх}} > A. \end{cases}$$

а) Напишите общее выражение для плотности распределения вероятностей выходного сигнала $U_{\text{вых}}$, считая входной сигнал нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием $\overline{U}$ и дисперсией σ_U^2.

б) Определите математическое ожидание выходного сигнала, считая $A = B = 5$, а входной сигнал — равномерно распределенным в интервале от -2 до $+8$.

2.9.4. Допустим, что входной сигнал ограничителя, параметры которого приведены в задаче 2.9.3*б*, описывается выражением

$$U(t) = 10 \sin(\omega t + \Theta),$$

где Θ — случайная величина, равномерно распределенная на интервале от 0 до 2π.

Входной сигнал ограничителя в произвольные моменты времени подвергается дискретизации и преобразуется в последовательность отсчетов, образующих случайную величину U_t. Определите для нее:

а) плотность распределения вероятностей,
б) математическое ожидание,
в) дисперсию.

ЛИТЕРАТУРА

Читатели могут воспользоваться списком литературы, приведенным в гл. 1 и в первую очередь им будут полезны книги [2, 6, 8].

Глава 3

Совместные распределения случайных величин

3.1. Двумерная функция распределения вероятностей

До сих пор рассматривались ситуации, в которых фигурировала лишь одна случайная величина. В частности, она могла соответствовать значениям, принимаемым случайным напряжением или током в определенный момент времени. Однако ясно, что с помощью таких мгновенных значений нельзя описать поведение случайной функции времени, поскольку с ней, даже если она ограничена во времени, можно связать бесконечное множество случайных величин. Отсюда возникает вопрос: как распространить вероятностное описание, применявшееся для одной случайной величины, на реальную ситуацию, где фигурируют непрерывные функции времени? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим сначала ситуацию с двумя случайными величинами. Может показаться, что, выполнив такое рассмотрение, мы не решим поставленной задачи и не найдем способа, позволяющего совместно описывать любое число случайных величин. Однако ниже станет ясно, что способ совместного описания двух случайных величин пригоден и для описания ситуаций с любым их числом, если временной интервал, разделяющий две случайные величины, считать произвольным. Таким образом, зная, как описывать две случайные величины, разделенные произвольным промежутком времени, можно выполнить большинство видов обычного анализа систем. При анализе системы иногда нужно найти связь между ее входным и выходным сигналами для одного или двух моментов времени. При этом опять приходится совместно рассматривать две случайные величины.

Чтобы научиться анализировать такие ситуации, необходимо расширить понятия функции распределения вероятностей и плотности распределения вероятностей, рассмотренные в гл. 2.

Двумерную (*совместную*) *функцию распределения вероятностей* случайных величин X и Y определяют как вероятность события {Случайная величина X принимает значение, меньшее или равное x, и случайная величина Y принимает значение, меньшее или равное y}, т. е.

$$F(x, y) = P(X \leqslant x,\ Y \leqslant y).$$

Такое определение $F(x, y)$ является простым расширением понятия функции распределения вероятностей одной случайной величины на случай двух случайных величин.

Свойства двумерной функции распределения вероятностей аналогичны свойствам функции распределения вероятностей одной случайной величины. Кратко они могут быть записаны следующим образом:

1. $0 \leqslant F(x, y) \leqslant 1$ при $-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty$,

2. $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$,

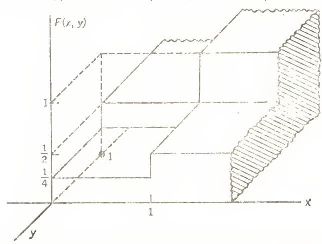


Рис. 3.1. Совместная функция распределения вероятностей.

3. $F(\infty, \infty) = 1$,

4. $F(x, y)$ есть монотонно неубывающая функция и по x и по y;

5. $F(\infty, y) = F_Y(y), \quad F(x, \infty) = F_X(x)$.

В п. 5 в обозначениях $F_Y(y)$ и $F_X(x)$ индексы X и Y введены для того, чтобы подчеркнуть, что эти две функции соответствующих аргументов не обязательно имеют один и тот же вид.

Совместную функцию распределения вероятностей рассмотрим на примере опыта с двумя монетами. Пусть X и Y — случайные величины, связанные с первой и второй монетами и принимающие значение 0 при выпадении герба и 1 при выпадении решетки. Вид соответствующей двумерной функции распределения вероятностей $F(x, y)$ показан на рис. 3.1. Обратите внимание, что она обладает всеми перечисленными выше свойствами.

Введем понятие *двумерной (совместной) плотности распределения вероятностей* $f(x, y)$, являющейся производной функции

$F(x, y)$. Поскольку $F(x, y)$ зависит от двух независимых переменных x и y, дифференцирование нужно выполнять по обеим переменным. Таким образом,

$$f(x, y) = \partial^2 F(x, y)/\partial x\, \partial y, \tag{3.1}$$

где порядок дифференцирования может быть любой. При этом элемент вероятности можно записать в виде

$$f(x, y)\, dx\, dy = \mathrm{P}(x < X \leqslant x + dx,\ y < Y \leqslant y + dy). \tag{3.2}$$

Свойства совместной плотности распределения вероятностей аналогичны свойствам плотности распределения вероятностей одной случайной величины и могут быть записаны в следующей краткой форме:

1. $f(x, y) \geqslant 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty,$
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1,$
3. $F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(u, v)\, dv\, du,$
4. $f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy, \quad f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx,$
5. $\mathrm{P}(x_1 < X \leqslant x_2,\ y_1 < Y \leqslant y_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dx\, dy.$

Обратите внимание, что второе свойство требует, чтобы объем, ограниченный двумерной плотностью распределения вероятностей, равнялся 1 *).

Рассмотрим простой пример: пусть двумерная плотность распределения вероятностей случайных величин X и Y постоянна от x_1 до x_2 и от y_1 до y_2, т. е.

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/(x_2 - x_1)(y_2 - y_1), & x_1 < x \leqslant x_2, \quad y_1 < y \leqslant y_2, \\ 0, & x \leqslant x_1, \quad x > x_2, \quad y \leqslant y_1, \quad y > y_2. \end{cases} \tag{3.3}$$

Вид этой плотности распределения вероятностей и соответствующей ей двумерной функции распределения показан на рис. 3.2. На практике такой плотностью распределения вероятностей могут описываться, к примеру, размеры полупроводниковых подложек прямоугольной формы. Каждая подложка характеризуется размерами в двух взаимно перпендикулярных направлениях, которые

*) Иногда это свойство называют условием нормировки двумерной плотности вероятностей. — *Прим. ред.*

можно считать случайными величинами, равномерно распределенными внутри определенных интервалов.

Совместная плотность распределения вероятностей может использоваться для определения математического ожидания одной случайной величины. Математическое ожидание любой функции $g(X, Y)$ равно

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y)\, dx\, dy. \tag{3.4}$$

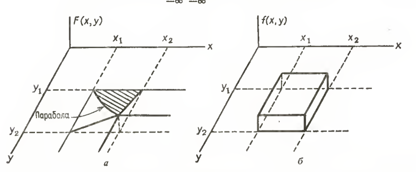


Рис. 3.2. Совместная функция распределения (*a*) и соответствующая ей двумерная плотность вероятностей (*б*).

Математическое ожидание функции $g(X, Y) = XY$

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y)\, dx\, dy \tag{3.5}$$

называют *корреляцией* случайных величин X и Y; свойства корреляции (3.5) будут подробно рассмотрены в разд. 3.4.

Найдем корреляцию случайных величин X и Y, двумерная плотность распределения вероятностей которых $f(x, y)$ имеет простой вид, показанный на рис. 3.2, *б*. Поскольку $f(x, y)$ отлична от 0 только внутри заданных интервалов изменения, выражение (3.5) преобразуется к форме

$$E[XY] = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} xy\,[1/(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)]\, dy =$$

$$= [1/(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)]\,[x^2/2 \big|_{x_1}^{x_2}]\,[y^2/2 \big|_{y_1}^{y_2}] = {}^1/_4\,(x_1 + x_2)(y_1 + y_2).$$

Из четвертого свойства совместной плотности распределения вероятностей следует, что интегрированием ее по всей области изменения одной случайной величины можно получить одномерную плотность распределения вероятностей другой случайной

величины. Таким образом, для $f(x, y)$, вид которой показан на рис. 3.2, *б*, получим

$$f_X(x) = \int_{y_1}^{y_2} [1/(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)]\, dy =$$

$$= [1/(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)] [y|_{y_1}^{y_2}] = 1/(x_2 - x_1), \quad (3.6а)$$

$$f_Y(y) = \int_{x_1}^{x_2} [1/(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)]\, dx =$$

$$= [1/(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)] [x|_{x_1}^{x_2}] = 1/(y_2 - y_1). \quad (3.6б)$$

Упражнение 3.1.1. Предположим, что размеры сторон прямоугольной полупроводниковой подложки представляют собой случайные величины, равномерно распределенные с математическими ожиданиями, соответственно равными 1 и 2 см, и одинаковыми максимальными отклонениями относительно математического ожидания, равными 0,01 см. Определите

а) вероятность того, что размеры сторон подложки превысят указанные математические ожидания на 0,005 см,

б) вероятность того, что размер большей из сторон превысит свое математическое ожидание на 0,005 см, а размер меньшей будет меньше своего математического ожидания на 0,005 см,

в) математическое ожидание площади подложки.

Ответы: 1/16, 1/16, 2 см².

Упражнение 3.1.2. Совместная плотность распределения вероятностей случайных величин X и Y имеет вид

$$f(x, y) = \begin{cases} A \exp\{-(3x + 4y)\}, & x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \quad y < 0. \end{cases}$$

Определите:

а) значение A, при котором это выражение действительно можно считать совместной плотностью распределения вероятностей,

б) вероятность того, что $X > 1/2$, а $Y > 1/4$,

в) математическое ожидание случайной величины XY.

Ответы: 0,0821, 12, 0,0833.

3.2. Условные функция распределения и плотность вероятностей

Теперь, после введения понятия двумерной (совместной) функции распределения и плотности вероятностей двух случайных величин, можно продолжить начатое в разд. 2.8 рассмотрение условных функции распределения и плотности вероятностей случайной величины X. В приведенных там определениях событие M предполагалось до некоторой степени произвольным и приводилось несколько соответствующих этому случаю примеров. Здесь мы свяжем его с еще одной случайной величиной Y.

Событие M со случайной величиной Y можно связать различными способами. В частности, через M можно обозначить наступ

ление события $\{Y \leqslant y\}$, и, следовательно, $P(M)$ будет безусловной функцией распределения вероятностей $F_Y(y)$ случайной величины Y. Из выражения (2.47), служащего определением условной функции распределения вероятностей, следует, что

$$F_X(x \mid Y \leqslant y) = P[X \leqslant x,\ M]/P(M) = F(x,\ y)/F_Y(y). \quad (3.7)$$

Через M можно также обозначить событие $\{y_1 < Y \leqslant y_2\}$. При этом из (2.47) следует, что

$$F_X(x \mid y_1 < Y \leqslant y_2) = [F(x,\ y_2) - F(x,\ y_1)]/[F_Y(y_2) - F_Y(y_1)]. \quad (3.8)$$

В обеих рассмотренных ситуациях вероятность $P(M)$ события M была отлична от нуля. Однако весьма часто встречается такая форма условной вероятности, где через M обозначено событие $\{Y = y\}$ в предположении, что случайная величина Y распределена непрерывно, при этом $P(M) = 0$. Условная функция распределения вероятностей представляет собой отношение двух вероятностей и поэтому, как правило, существует даже при $P(M) = 0$. Из (3.8), положив $y_1 = y$, $y_2 = y + \Delta y$ и перейдя к пределу при $\Delta y \to 0$, получим

$$F_X(x \mid Y = y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(x,\ y + \Delta y) - F(x,\ y)}{F_Y(y + \Delta y) - F_Y(y)} =$$

$$= \frac{\partial F(x,\ y)/\partial y}{\partial F_Y(y)/\partial y} = \left[\int_{-\infty}^{x} f(u,\ y)\, du\right] \Bigg/ f_Y(y). \quad (3.9)$$

Обычно условную плотность распределения вероятностей записывают в виде

$$f_X(x \mid Y = y) = \partial F(x \mid Y = y)/\partial x = f(x,\ y)/f_Y(y). \quad (3.10)$$

Меняя местами случайные величины X и Y, получим

$$f_Y(y \mid X = x) = f(x,\ y)/f_X(x). \quad (3.11)$$

В связи с широким использованием формул (3.10) и (3.11), удобно пользоваться сокращенной записью. Поэтому если не возникает двусмысленности, то $f_X\ (x \mid y)$ и $f_Y\ (y \mid x)$ в последующем будем записывать в виде

$$f(x \mid y) = f(x,\ y)/f_Y(y), \quad (3.12)$$

$$f(y \mid x) = f(x,\ y)/f_X(x). \quad (3.13)$$

С помощью формул (3.12) и (3.13) для непрерывных случайных величин можно получить вариант формулы Байеса, определенной выше выражением (1.21) для дискретных случайных величин. Исключая из (3.12) и (3.13) $f(x,\ y)$, сразу получим

$$f(y \mid x) = f(x \mid y)\, f_Y(y)/f_X(x). \quad (3.14)$$

Из (3.12) и (3.13) можно также получить безусловные плотности распределения вероятностей:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x\,|\,y)\,f_Y(y)\,dy, \tag{3.15}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y\,|\,x)\,f_X(x)\,dx. \tag{3.16}$$

Эти две формулы являются непрерывными аналогами формулы (1.20), применяющейся для дискретных случайных величин.

Необходимо подчеркнуть, что двумерная плотность распределения вероятностей полностью определяет как обе безусловные, так и обе условные плотности распределения вероятностей. В качестве примера рассмотрим двумерную плотность распределения вероятностей вида

$$f(x,\ y) = \begin{cases} {}^6/_5\,(1 - x^2y), & 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & x < 0, \quad x > 1, \quad y < 0, \quad y > 1. \end{cases}$$

Проинтегрировав $f(x,\ y)$ сперва по y, а затем по x, получим безусловные плотности распределения вероятностей случайных величин X и Y, т. е.

$$f_X(x) = {}^6/_5\,(1 - x^2/2), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$f_Y(y) = {}^6/_5\,(1 - y/3), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

Теперь в соответствии с (3.12) и (3.13) находим условные плотности распределения вероятностей

$$f(x\,|\,y) = (1 - x^2y)/(1 - y/3), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

$$f(y\,|\,x) = (1 - x^2y)/(1 - x^2/2), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

Условные плотности распределения вероятностей используются во многих ситуациях, среди которых очень часто встречается такая (принадлежащая, возможно, к числу самых простых), где наблюдаемая случайная величина является суммой двух других, одну из которых относят к полезному сигналу, а другую — к шуму. Пусть, например, наблюдается случайная функция времени $Y(t)$, состоящая из полезного сигнала $X(t)$ и аддитивного шума $N(t)$. Для произвольного момента времени t значение $Y = Y(t)$ этой функции представляет собой случайную величину, равную сумме двух других $X = X(t)$ и $N = N(t)$, т. е. $Y = X + N$. Предположим, что нужно определить $f(x\,|\,y)$,

если результаты наблюдения случайной величины Y известны. Знать $f(x|y)$ необходимо, потому что значение x, являющееся наиболее вероятным при данном наблюдаемом значении y, может служить правдоподобной оценкой реального значения, принимаемого случайной величиной X, когда измерения производятся на фоне шума.

Условную плотность вероятностей случайной величины X найдем по формуле Байеса

$$f(x|y) = f(y|x) f_X(x)/f_Y(y).$$

Как следует из определения $f(y|x)$, значение x случайной величины X задано, и случайный характер Y связан только с шумовой составляющей N, плотность распределения вероятностей которой $f_N(n)$ предполагается известной. Поскольку $N = Y - X$, то $f(y|x) = f_N(n) = f_N(y-x)$. Учитывая (3.16), запишем

$$f(x|y) = f_N(y-x) f_X(x)/f_Y(y) =$$
$$= f_N(y-x) f_X(x) \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} f_N(y-x) f_X(x)\,dx. \quad (3.17)$$

Итак, если $f_X(x)$ и $f_N(n)$ *a priori* известны, то можно определить условную плотность распределения вероятностей случайной величины X, т. е. $f(x|y)$. Если, например, наблюдаемое значение $Y = y_1$, то значение x, для которого $f(x|y_1)$ максимально, можно считать правдоподобной оценкой значения, принимаемого случайной величиной X.

Рассмотрим конкретный пример использования условной плотности распределения вероятностей для экспоненциально распределенной случайной величины с плотностью вероятностей вида

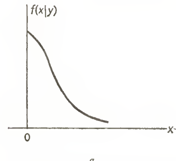
$$f_X(x) = \begin{cases} b\exp\{-bx\}, & x \geqslant 0. \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

С плотностью распределения вероятностей такого вида можно встретиться, в частности, при преобразовании продолжительности временных интервалов, разделяющих моменты регистрации элементарных частиц высоких энергий счетчиком, установленным на борту космического аппарата, в электрический сигнал, передаваемый на землю. Предположим, что к этому сигналу аддитивно добавляется гауссовский случайный шум с нулевым математическим ожиданием и плотностью распределения вероятностей

$$f_N(n) = [1/(2\pi)^{1/2}\sigma_N] \exp\{-n/2\sigma_N^2\}.$$

Одномерная плотность распределения вероятностей $f_Y(y)$, фигурирующая в знаменателе среднего члена выражения (3.17), для данного примера будет равна

$$f_Y(y) = \int_0^\infty [b/(2\pi)^{1/2}\sigma_N] \exp\{-(y-x)^2/2\sigma_N^2\} \exp\{-bx\}\, dx =$$
$$= (b/2)\exp\{(-by) + b^2\sigma_N^2/2\}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{y - b\sigma_N^2}{2^{1/2}\sigma_N}\right)\right]^{1)}. \quad (3.18)$$



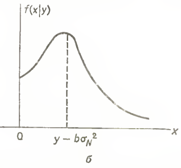


Рис. 3.3. Условная плотность вероятностей: *а* — для $y < b\sigma_N^2$, *б* — для $y > b\sigma_N^2$.

Необходимо однако заметить, что если нужно найти лишь положение максимума функции $f(x, y)$, то оценивать функцию $f_Y(y)$ нет необходимости, поскольку она не зависит от x. Следовательно, для заданного значения $Y = y$ функция $f_Y(y)$ становится постоянной величиной; обозначим ее через $p_Y(y)$.

Теперь, учитывая (3.17), можно записать искомое выражение для условной плотности распределения вероятностей случайной величины X:

$$f(x \mid y) = \begin{cases} [b/(2\pi)^{1/2}\sigma_N p_Y(y)] \exp\{-(y-x)^2/2\sigma_N^2\} \exp\{-bx\}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Это выражение можно преобразовать к виду

$$f(x \mid y) = \begin{cases} [b/(2\pi)^{1/2}\sigma_N p_Y(y)] \exp\{-(1/2\sigma_N^2) \times \\ \quad \times [x^2 - 2(y - b\sigma_N^2)x + y^2]\}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

Графики $f(x \mid y)$ для двух значений y показаны на рис. 3.3.

---

1) Функция ошибок erf (z) связана с нормальным распределением и равна

$$\operatorname{erf}(z) = (2/\pi^{1/2}) \int_0^z e^{-u^2}\, du = 2\Phi(2^{1/2}z) - 1.$$

Выше отмечалось, что правдоподобной оценкой значения, принимаемого случайной величиной X при наблюдающемся значении случайной величины Y, является значение x, при котором $f(x|y)$ максимальна. Поскольку максимум $f(x|y)$ по x соответствует минимуму ее экспоненциального члена, ясно, что найти положение этого максимума можно, приравняв нулю производную экспоненциального члена по x. Таким образом, $2x - 2(y - b\sigma_N^2) = 0$, или

$$x = y - b\sigma_N^2. \tag{3.20}$$

Итак, соотношение (3.20) является условием, позволяющим определить положение максимума $f(x|y)$ при $y - b\sigma_N^2 > 0$. Если же $y - b\sigma_N^2 \leqslant 0$, то на графике функции $f(x|y)$ отсутствуют точки, где ее производная $\partial f(x|y)/\partial x$ равна нулю, и своего максимума она достигает при $x = 0$. Пусть, например, $Y = y_1$. Тогда если $y_1 \geqslant b\sigma_N^2$, то $\hat{X} = y_1 - b\sigma_N^2$ будет являться правдоподобной оценкой случайной величины X. Однако если $y_1 < b\sigma_N^2$, то такой оценкой будет $\hat{X} = 0$. Обратите внимание, что при уменьшении мощности шума ($\sigma_N^2 \to 0$) $\hat{X}$ приближается к наблюдаемому значению y_1.

Упражнение 3.2.1. Совместная плотность распределения вероятностей случайных величин X и Y имеет вид

$$f(x, y) = \begin{cases} k(x+y), & 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & x < 0, \quad x > 1, \quad y < 0, \quad y > 1. \end{cases}$$

Определите:

а) значение k, для которого это выражение действительно можно считать двумерной плотностью распределения вероятностей,

б) условную вероятность того, что $X > 1/2$, если $Y = 1/2$,

в) условную вероятность того, что $Y \leqslant 1/2$, если $X = 1/2$.

Ответы: 3/8; 5/8; 1.

Упражнение 3.2.2. Случайный сигнал $X(t)$ распределен равномерно в интервале от 6 до 10 В. Его измеряют в присутствии гауссовского шума $N(t)$ с нулевым математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением, равным 2 В.

Найдите наиболее правдоподобную оценку $\hat{X}$ истинного значения сигнала, если результат измерения составил:

а) 4 В, б) 8 В, в) 12 В.

Ответы: 6 В, 8 В, 10 В.

3.3. Статистическая независимость случайных величин

Понятие статистической независимости было введено выше в связи с дискретными случайными величинами, но для непрерывных случайных величин оно имеет не менее важное значение. Случайные величины, связанные с различными физическими источниками, как правило, статистически не связаны между

собой. Например, случайные тепловые падения напряжения на резисторах какой-либо электронной схемы не связаны друг с другом. Статистическая независимость может также иметь место, если случайные величины обязаны своим происхождением одному и тому же источнику, но сильно разделены во времени. К примеру, тепловое напряжение резистора практически не связано с падением напряжения на следующий день. Если две случайные величины статистически независимы, то, зная параметры одной из них, нельзя судить о поведении другой.

Двумерная плотность распределения вероятностей двух статистически независимых случайных величин всегда может быть представлена в виде произведения двух одномерных плотностей распределения вероятностей. Таким образом, выражение

$$f(x,\ y) = f_X(x)\, f_Y(y) \tag{3.21}$$

может использоваться для определения статистической независимости двух случайных величин X, Y, поскольку можно показать, что такое условие разложения $f(x, y)$ на два сомножителя $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ является необходимым и достаточным условием статистической независимости X и Y. В частности, оно удовлетворяется для двумерной плотности распределения вероятностей вида (3.3). Следовательно, описываемые (3.3) две случайные величины статистически не зависят друг от друга.

Одно из следствий статистической независимости связано с корреляцией, определяемой выражением (3.5). Представив двумерную плотность распределения вероятностей в виде произведения двух сомножителей, перепишем (3.5) в виде

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\, dy = E[X]\, E[Y] = \overline{X}\,\overline{Y}. \tag{3.22}$$

Из (3.22) следует, что математическое ожидание произведения двух статистически независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий. Если математическое ожидание хотя бы одной из этих величин равно нулю, то и математическое ожидание их произведения равно нулю.

Другое следствие статистической независимости случайных величин заключается в том, что их условные плотности распределения вероятностей превращаются в соответствующие безусловные. Например, из (3.12) следует, что

$$f(x \mid y) = f(x,\ y)/f_Y(y),$$

но если X и Y — статистически независимые случайные величины, то их совместная плотность распределения вероятностей

может быть представлена в виде двух сомножителей, и мы получаем

$$f(x\,|\,y) = f_X(x)\,f_Y(y)/f_Y(y) = f_X(x),$$

$$f(y\,|\,x) = f(x,\ y)/f_X(x) = f_X(x)\,f_Y(y)/f_X(x) = f_Y(y).$$

Следует отметить, что случайные величины с совместной плотностью распределения вероятностей, приведенной в упр. 3.1.2, являются статистически независимыми, так как эту плотность вероятностей можно представить в виде произведения двух сомножителей, один из которых зависит только от x, а другой только от y. С другой стороны, случайные величины, приведенные в упр. 3.2.1, не являются статистически независимыми, поскольку их совместную плотность распределения вероятностей нельзя представить в виде такого произведения.

Упражиеине 3.3.1. Совместиая плотиость распределеиия вероятиостей случайных величии X и Y равна

$$f(x,\ y) = \begin{cases} k\,(xy + 2x + y + a), & 0 \leqslant x \leqslant 1,\quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & x < 0,\quad x > 1,\quad y < 0,\quad y > 1. \end{cases}$$

Определите:

а) значеиия k и a, при которых случайиые величины X и Y будут статистически иезависимы;

б) математическое ожидаиие случайной величииы XY.

Ответы: 4/15, 8/27, 2.

Упражиение 3.3.2. Плотиости распределеиия вероятиостей случайиых величин X и Y описываются иормальиыми закоиами с математическими ожидаииями 1 и 2 и дисперсиями 1 и 4 соответствеиио. Найдите вероятность того, что $XY > 0$.

Ответ: 0,7078.

3.4. Корреляция двух случайных величин

Как отмечалось выше, один из важнейших аспектов применения совместной плотности вероятностей связан с возможностью определения корреляции двух случайных величин, т. е. степени их статистической зависимости.

Корреляцией случайных величин X и Y, которые соответственно могут принимать значения x и y, называется математическое ожидание произведения этих случайных величин

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f(x,\ y)\,dx\,dy = \overline{XY}.$$

Если математические ожидания этих случайных величин отличны от нуля, то вычисления часто удобнее выполнять, предварительно перейдя к центрированным случайным величинам. Математиче-

ское ожидание двух центрированных случайных величин $(X - \overline{X})$ и $(Y - \overline{Y})$ называется *ковариацией* и равно

$$E[(X - \overline{X})(Y - \overline{Y})] = \overline{(X - \overline{X})(Y - \overline{Y})} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{X})(y - \overline{Y}) f(x, y)\, dx\, dy. \quad (3.23)$$

Ковариацию двух случайных величин можно считать аналогом дисперсии одной случайной величины.

Если нужно найти корреляцию двух случайных величин без учета их масштабов, то пользуются *коэффициентом корреляции* (иногда называемым *нормированной ковариацией*). Его обозначают через ρ и определяют как

$$\rho = E\{[(X - \overline{X})/\sigma_X][(Y - \overline{Y})/\sigma_Y]\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [(x - \overline{X})/\sigma_X][(y - \overline{Y})/\sigma_Y] f(x, y)\, dx\, dy. \quad (3.24)$$

Обратите внимание на то, что в (3.24) разности случайных величин и их математических ожиданий делятся на соответствующие средние квадратические отклонения. Полученные в результате такого преобразования случайные величины имеют нулевые математические ожидания и единичные дисперсии и называются *центрированными* и *нормированными*.

Иногда для определения коэффициента корреляции удобно использовать еще одну формулу, получаемую из (3.24) при перемножении членов подынтегрального выражения. Итак,

$$\rho = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (xy - \overline{X}y - \overline{Y}x + \overline{X}\overline{Y}) f(x, y)\, dx\, dy/\sigma_X\sigma_Y.$$

Выполнив интегрирование, получим

$$\rho = [E(XY) - \overline{X}\overline{Y}]/\sigma_X\sigma_Y. \quad (3.25)$$

Рассмотрим некоторые свойства коэффициента корреляции, для чего введем центрированные и нормированные случайные величины ξ и η, определив их следующим образом: $\xi = (X - \overline{X})/\sigma_X$, $\overline{\xi} = 0$, $\sigma_\xi^2 = 1$, $\eta = (Y - \overline{Y})/\sigma_Y$, $\overline{\eta} = 0$, $\sigma_\eta^2 = 1$. Тогда $\rho = E[\xi\eta]$. Теперь рассмотрим выражение

$$E[(\xi \pm \eta)^2] = E[\xi^2 \pm 2\xi\eta + \eta^2] = 1 \pm 2\rho + 1 = 2(1 \pm \rho).$$

Поскольку случайная величина $(\xi \pm \eta)^2$ не может быть отрицательной, ее математическое ожидание тоже не может быть меньше нуля, так что $2(1 \pm \rho) \geqslant 0$. Следовательно, коэффициент корреляции по абсолютной величине не превышает единицы, т. е. $-1 \leqslant \rho \leqslant 1$.

Если случайные величины X и Y статистически независимы, то

$$\rho = E\,[\xi\eta] = \bar{\xi}\bar{\eta} = 0,$$

поскольку математические ожидания ξ и η равны нулю. Таким образом, коэффициент корреляции статистически независимых случайных величин всегда равен 0. Однако обратное утверждение справедливо не всегда. Равный нулю коэффициент корреляции двух случайных величин не обязательно свидетельствует о статистической независимости этих случайных величин; как мы увидим ниже, нулевой коэффициент корреляции эквивалентен статистической независимости лишь для гауссовских случайных величин.

Чтобы проиллюстрировать свойства коэффициента корреляции, рассмотрим двумерную плотность распределения вероятностей

$$f(x,\ y) = \begin{cases} x+y, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & x<0, \quad x>1, \quad y<0, \quad y>1. \end{cases}$$

Воспользовавшись четвертым свойством двумерной плотности распределения вероятностей, сразу получим одномерные плотности распределения вероятностей

$$f_X(x) = \int_0^1 (x+y)\,dy = x + 1/2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 (x+y)\,dx = y + 1/2, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

с помощью которых нетрудно вычислить математические ожидания обеих случайных величин:

$$\overline{X} = \int_0^1 x\,(x + 1/2)\,dx = 7/12,$$

$$\overline{Y} = \int_0^1 y\,(y + 1/2)\,dy = 7/12.$$

Дисперсии этих величин будут соответственно равны

$$\sigma_X^2 = \int_0^1 (x - {}^7/_{12})^2\,(x + {}^1/_2)\,dx = 11/144,$$

$$\sigma_Y^2 = \int_0^1 (y - {}^7/_{12})^2\,(y + {}^1/_2)\,dy = 11/144$$

а математическое ожидание случайной величины XY равно

$$E[XY] = \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y)\,dx\,dy = 1/3.$$

Следовательно, в соответствии с (3.25) коэффициент корреляции

$$\rho = (E[XY] - \overline{X}\overline{Y})/\sigma_X\sigma_Y = [1/3 - (7/12)^2]/(11/144) = -1/11.$$

Хотя коэффициент корреляции можно вычислить для любой пары случайных величин, особенно полезно использовать его для гауссовских случайных величин, совместные распределения вероятностей которых подчиняются нормальному закону. Совместная плотность распределения вероятностей двух гауссовских случайных величин X и Y имеет вид

$$f(x, y) = [2\pi\sigma_X\sigma_Y(1-\rho^2)^{1/2}]^{-1}\exp\{[-1/2(1-\rho^2)]\times$$
$$\times[(x-\overline{X})^2/\sigma_X^2 + (y-\overline{Y})^2/\sigma_Y^2 - 2(x-\overline{X})(y-\overline{Y})\rho/\sigma_X\sigma_Y]\}. \quad (3.26)$$

Обратите внимание на то, что при $\rho = 0$ формула (3.26) принимает вид

$$f(x, y) = (2\pi\sigma_X\sigma_Y)^{-1}\exp\{(-1/2)[(x-\overline{X})^2/\sigma_X^2 + (y-\overline{Y})^2/\sigma_Y^2]\} =$$
$$= f_X(x)\,f_Y(y),$$

используемый в случае статистической независимости двух гауссовских случайных величин. Следовательно, условие $\rho = 0$ для гауссовских случайных величин действительно свидетельствует об их статистической независимости.

Коэффициент корреляции можно также использовать для представления некоторых результатов рассмотрения случайных величин с произвольной плотностью вероятностей. Например, из определения центрированных и нормированных случайных величин ξ и η ясно, что $X = \sigma_X\xi + \overline{X}$, $Y = \sigma_Y\eta + \overline{Y}$, и, следовательно,

$$\overline{XY} = E[(\sigma_X\xi + \overline{X})(\sigma_Y\eta + \overline{Y})] =$$
$$= E[\sigma_X\sigma_Y\xi\eta + \overline{X}\sigma_Y\eta + \overline{Y}\sigma_X\xi + \overline{X}\overline{Y}] = \rho\sigma_X\sigma_Y + \overline{X}\overline{Y}. \quad (3.27)$$

Рассмотрим еще один пример, в котором

$$E[(X \pm Y)^2] = E[X^2 \pm 2XY + Y^2] = \overline{X^2} \pm 2\overline{XY} + \overline{Y^2} =$$
$$= \sigma_X^2 + (\overline{X})^2 \pm 2\rho\sigma_X\sigma_Y \pm 2\overline{X}\overline{Y} + \sigma_Y^2 + (\overline{Y})^2 =$$
$$= \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \pm 2\rho\sigma_X\sigma_Y + (\overline{X} \pm \overline{Y})^2.$$

Поскольку последний член в правой части этого выражения представляет собой квадрат математического ожидания случайной величины $(X \pm Y)$, то ее дисперсия равна

$$[\sigma_{X\pm Y}]^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \pm 2\rho\sigma_X\sigma_Y. \quad (3.28)$$

Обратите внимание на то, что, если случайные величины некоррелированы ($\rho = 0$), дисперсия их суммы или разности равна сумме их дисперсий.

Упражнение 3.4.1. Формула (3.28) может использоваться для определения коэффициента корреляции двух случайных сигналов. Пусть, например, математическое ожидание и дисперсия одного случайного сигнала равны 5 и 8, а другого 3 и 10 соответственно. Кроме того, пусть средний квадрат суммы этих сигналов равен 75. Определите:

а) дисперсию суммарного сигнала,

б) корреляцию сигналов,

в) коэффициент корреляции сигналов.

Ответы: —0,391, 11, 11,5.

Упражнение 3.4.2. Дисперсии статистически независимых случайных величин X и Y равны соответственно 9 и 16. Случайная величина $Z = X + Y$. Считая математические ожидания всех случайных величин отличными от нуля, определите:

а) коэффициент корреляции случайных величин X и Z,

б) коэффициент корреляции случайных величин Y и Z,

в) дисперсию случайной величины Z.

Ответы: 25, 0,6, 0,8.

3.5. Плотность распределения вероятностей суммы (разности) двух случайных величин

В приведенном выше примере было показано, что математическое ожидание и дисперсия суммы (или разности) двух случайных величин могут быть легко определены по их математическим ожиданиям, дисперсиям и коэффициенту корреляции, при этом плотности вероятностей не используются. Что же касается задач, связанных с нахождением плотности распределения вероятностей суммы (разности) двух случайных величин, то они, как правило, оказываются более сложными. Здесь будет рассматриваться лишь одна такая задача для статистически независимых случайных величин. Рассмотрение общего случая выходит за рамки проводимого обсуждения.

Пусть случайная величина Z является суммой случайных величин X и Y с плотностями распределения вероятностей соответственно $f_X(x)$ и $f_Y(y)$. Найдем плотность распределения вероятностей $f_Z(z)$ случайной величины $Z = X + Y$. Рис. 3.4. поясняет ситуацию. Функцию распределения вероятностей случайной величины Z $F_Z(z) = \mathrm{P}(Z \leqslant z) = \mathrm{P}(X + Y \leqslant z)$ можно получить, проинтегрировав двумерную плотность вероятностей $f(x, y)$ по области, расположенной под прямой $x + y = z$. Для любого заданного y значение x должно быть таким, чтобы выполнялось условие $-\infty < x < z - y$. Таким образом,

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-y} f(x, y)\, dx\, dy. \tag{3.29}$$

В частности, если X и Y статистически независимы, то их совместную плотность распределения вероятностей можно представить в виде произведения двух сомножителей, и (3.29) принимает вид

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-y} f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) \int_{-\infty}^{z-y} f_X(x)\, dx\, dy.$$

Плотность распределения вероятностей случайной величины $Z = X + Y$ найдем, продифференцировав $F_Z(z)$ по z. Таким образом,

$$f_Z(z) = dF_Z(z)/dz = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) f_X(z-y)\, dy, \qquad (3.30)$$

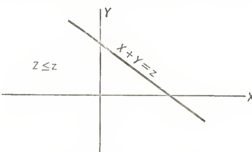


Рис. 3.4. Область $X + Y = Z \leqslant z$.

поскольку переменная z фигурирует только в верхнем пределе второго интеграла. Итак, мы видим, что в данном случае $f_Z(z)$ представляет собой *свертку* одномерных плотностей распределения вероятностей случайных величин X и Y.

Понятно также, что $F_Z(z)$ можно записать не только в виде (3.29), но и как

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y)\, dy\, dx,$$

выполнив действия, аналогичные использованным при выводе формулы (3.30), находим

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\, dx. \qquad (3.31)$$

Следовательно, как и в системном анализе, свертку можно выполнять, используя любую из двух эквивалентных формул (3.30) и (3.31).

Поясним способ определения плотности вероятностей суммы двух случайных величин X и Y. Рассмотрим пример, иллюстрируемый рис. 3.5. Показанные на этом рисунке плотности распределения вероятностей случайных величин X и Y могут быть записаны в следующем виде:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & x < 0, \quad x > 1, \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y \geqslant 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Рис. 3.5. Плотности вероятностей двух случайных величин.

Интегрирование должно выполняться в два приема: сначала для области $0 < z \leqslant 1$, а затем для области $z > 1$. Для случая использования формулы (3.30) на рис. 3.6 показаны соответствующие графики.

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_0^z (1) \exp\{-(z-x)\}\, dx = 1 - e^{-z}, & 0 < z \leqslant 1, \\ \int_0^1 (1) \exp\{-(z-x)\}\, dx = (e-1)\, e^{-z}, & z > 1. \end{cases}$$

При $z < 0$ значение $f_Z(z) = 0$, поскольку $f_X(x) = 0$ при $x < 0$ и $f_Y(y) = 0$ при $y < 0$. Найденная плотность распределения вероятностей показана на рис. 3.6, *в*.

Полученные результаты можно непосредственно применить при рассмотрении случайной величины, являющейся разностью двух других, т. е. $Z = X - Y$. Для этого в формуле (3.30) достаточно y заменить на $-y$. Таким образом,

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) f_X(z+y)\, dy. \qquad (3.32)$$

И в этом случае можно воспользоваться другой возможной формулой, аналогичной (3.31), т. е.

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(x - z)\, dx. \tag{3.33}$$

Рассмотрим случайную величину Z, являющуюся суммой двух гауссовских случайных величин X и Y. Пусть

$$f_X(x) = [(2\pi)^{1/2}\sigma_X]^{-1} \exp[-(x - \overline{X})^2/2\sigma_X^2],$$
$$f_Y(y) = [(2\pi)^{1/2}\sigma_Y]^{-1} \exp[-(y - \overline{Y})^2/2\sigma_Y^2].$$

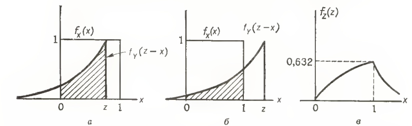


Рис. 3.6. Свертка плотностей вероятностей: a — $0 < z \leqslant 1$; $б$ — $z > 1$, $в$ — $f_Z(z)$.

Используя формулу (3.31), запишем выражение для плотности распределения вероятностей случайной величины $Z = X + Y$:

$$f_Z(z) = (2\pi\sigma_X\sigma_Y)^{-1} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(x - \overline{X})^2/2\sigma_X^2] \exp[-(z - x - \overline{Y})^2/2\sigma_Y^2]\, dx.$$

Предоставим читателю в качестве упражнения выполнить интегрирование. Результат должен быть

$$f_Z(z) = [2\pi(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)]^{-1/2} \exp\{-[z - (\overline{X} + \overline{Y})]^2/2(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)\}. \tag{3.34}$$

Из полученного результата ясно, что сумма двух независимых нормально распределенных случайных величин также распределена нормально с математическим ожиданием и дисперсией, являющимися соответственно суммами математических ожиданий и дисперсий исходных случайных величин. Кроме того, понятно, что добавление к сумме гауссовских случайных величин еще одной случайной гауссовской величины приводит к случайной величине с гауссовским распределением. Таким образом, случайная величина, полученная суммированием любого числа независимых нормально распределенных случайных величин, также распре-

делена нормально. Обладающие таким свойством плотности распределения вероятностей называются *устойчивыми*. Гауссовское распределение является одним из представителей очень ограниченного класса таких распределений. Можно также показать (хотя здесь мы не будем этого делать), что сумма коррелированных гауссовских случайных величин распределена нормально, ее математическое ожидание равно сумме математических ожиданий отдельных входящих в нее случайных величин, а дисперсия находится по формуле (3.28).

Тот факт, что суммы (или разности) случайных нормально распределенных величин также распределены нормально, очень важен при анализе линейных систем. Кроме того, можно показать, что функции, полученные дифференцированием или интегрированием случайных функций времени с гауссовским распределением, являются гауссовскими. Таким образом, при анализе линейной системы с гауссовскими входными сигналами все сигналы, существующие внутри этой системы и присутствующие на ее выходе, могут считаться гауссовскими. С аналогичной ситуацией встречаются в ходе фурье-анализа системы, находящейся в установившемся режиме, когда все сигналы в этой системе считают гармоническими и имеющими одну и ту же частоту.

Упражнение 3.5.1. Плотности вероятностей статистически независимых случайных величин X и Y равны соответственно

$$f_X(x) = 5e^{-5x}, \quad x \geqslant 0,$$
$$f_Y(y) = 2e^{-2y}, \quad y \geqslant 0.$$

Определите для случайной величины $Z = X + Y$:

а) $f_Z(0)$,

б) значение z, для которого $f_Z(z)$ максимальна,

в) вероятность того, что $Z > 1$.

Ответы: 0, 0,221, 0,305.

Упражнение 3.5.2. Сопротивления резисторов из данного набора представляют собой случайные величины, равномерно распределенные в диапазоне 100—120 Ом. Пусть два резистора, наугад взятые из этого набора, соединены последовательно. Определите:

а) наиболее вероятное сопротивление такой последовательной цепи,

б) максимальное сопротивление этой цепи,

в) вероятность того, что сопротивление этой цепи превысит 220 Ом.

Ответы: 220 Ом, 0,5, 240 Ом.

3.6. Характеристическая функция случайной величины

Как было показано в разд. 3.5, плотность распределения вероятностей суммы двух независимых случайных величин представляет собой свертку плотностей распределения вероятностей этих случайных величин. Понятно, что плотность вероятностей суммы более чем двух случайных величин можно найти, повторяя свертку до тех пор, пока она не будет выполнена для всех случай-

ных величин, входящих в сумму. Поскольку такая процедура трудна и занимает много времени, возникает естественный вопрос, нет ли более простого способа определения плотности вероятностей суммы случайных величин.

Известно, что если при анализе системы или цепи нужно выполнить свертку функций, то можно воспользоваться различными преобразованиями, которые, упрощая процедуру вычислений, дают возможность заменить свертку простым перемножением отображений участвующих в ней функций. При этом каждой свертке соответствует умножение полученного на предыдущем этапе результата на отображение очередной функции. Понятно, что такой способ можно применить и для нахождения плотностей вероятностей сумм случайных величин. Он будет рассмотрен в настоящем разделе.

Функция

$$\varphi(u) = E\,[\exp(jux)] \tag{3.35}$$

называется *характеристической функцией* случайной величины X; она представляет собой математическое ожидание и определяется с помощью выражения

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(jux)\, dx. \tag{3.36}$$

Формула (3.36) напоминает преобразование Фурье плотности распределения вероятностей $f(x)$, отличаясь от него отсутствием знака минус перед показателем экспоненты. Различие в знаке обусловлено математической традицией, а не фундаментальными соображениями, и не приводит к существенным различиям в приложении или свойствах этого преобразования в сравнении с преобразованием Фурье. Записав по аналогии с обратным преобразованием Фурье обратное преобразование от $\varphi(u)$, получим выражение для определения плотности распределения вероятностей случайной величины X:

$$f(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) \exp(jux)\, du. \tag{3.37}$$

Одно из приложений характеристических функций поясним на примере рассмотренной в разд. 3.5 задачи определения плотности вероятностей суммы Z двух статистически независимых случайных величин X и Y. Характеристические функции $\varphi_X(u)$ и $\varphi_Y(u)$ этих случайных величин соответственно равны

$$\varphi_X(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \exp(jux)\, dx,$$

$$\varphi_Y(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) \exp(juy)\, dy.$$

Свертке плотностей вероятностей случайных величин X и Y соответствует произведение характеристических функций этих случайных величин, равное характеристической функции случайной величины Z:

$$\varphi_Z(u) = \varphi_X(u)\,\varphi_Y(u).$$

Соответственно плотность распределения вероятностей случайной величины Z равна

$$f_Z(z) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_X(u)\,\varphi_Y(u)\exp(-juz)\,du. \qquad (3.38)$$

Описанный способ проиллюстрируем на примере, приведенном в предыдущем разделе, в котором случайная величина X была распределена равномерно, а случайная величина Y — экспоненциально. Поскольку

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & x < 0, \quad x > 1, \end{cases}$$

характеристическая функция $\varphi_X(u)$ случайной величины X равна

$$\varphi_X(u) = \int_0^1 (1)\exp\{jux\}\,dx = \exp\{jux\}/ju\,\Big|_0^1 = (e^{ju} - 1)/ju.$$

Аналогично,

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y \geqslant 0, \\ 0, & y < 0, \end{cases}$$

$$\varphi_Y(u) = \int_0^{\infty} e^{-y}e^{juy}\,dy = \frac{\exp\{(-1+ju)\,y\}}{(-1+ju)}\Bigg|_0^{\infty} = 1/(1 - ju).$$

Следовательно, характеристическая функция случайной величины Z

$$\varphi_Z(u) = \varphi_X(u)\,\varphi_Y(u) = (e^{ju} - 1)/ju\,(1 - ju),$$

а соответствующая ей плотность распределения вероятностей

$$f_Z(z) = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty}[(e^{ju} - 1)/ju\,(1 - ju)]\exp\{-juz\}\,du =$$

$$= (1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{ju\,(1 - z)\}\,du/ju\,(1 - ju) -$$

$$-(1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-juz\}\,du/ju\,(1 - ju)] = \begin{cases} 1 - e^{-z}, & 0 < z < 1, \\ (e - 1)\,e^{-z}, & 1 < z < \infty. \end{cases}$$

Интегрирование можно выполнять либо известными способами, применяемыми для нахождения первообразных путем преобразования Фурье, либо по таблицам.

Характеристические функции можно применять также для определения моментов случайной величины. Обратите внимание на то, что если $d\varphi(u)/du$ существует, то

$$d\varphi(u)/du = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(jx)\exp\{jux\}\,dx.$$

При $u = 0$ производная становится равной

$$d\varphi(u)/du\,|_{u=0} \equiv j\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = j\overline{X}. \qquad (3.39)$$

В результате дальнейшего дифференцирования порядок производной в подынтегральном выражении повышается, так что n-й начальный момент случайной величины X равен

$$\overline{X^n} = E[X^n] = (1/j^n)\,[d^n\varphi(u)/du^n]_{u=0}. \qquad (3.40)$$

Если характеристическая функция случайной величины известна, то часто проще для определения моментов использовать ее, а не плотность вероятностей, поскольку при этом можно обойтись без интегрирования.

Из полученных результатов вытекает несколько легко понятных следствий. Например, формулу (3.38) можно распространить на ситуацию с произвольным числом случайных величин. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины с характеристическими функциями соответственно $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$, ..., $\varphi_n(u)$ и если $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, то характеристическая функция случайной величины Y

$$\varphi_Y(u) = \varphi_1(u)\,\varphi_2(u)\ldots\varphi_n(u),$$

а соответствующая ей плотность распределения вероятностей

$$f_Y(y) = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(u)\,\varphi_2(u)\,\ldots\,\varphi_n(u)\exp\{-juy\}\,du. \qquad (3.41)$$

Метод характеристических функций можно использовать и тогда, когда случайные величины нельзя считать статистически независимыми. В частности, если случайные величины X и Y описываются совместной плотностью распределения вероятностей $f(x, y)$, то их совместная (двумерная) характеристическая функция есть

$$\varphi_{X,Y}(u, v) = E[\exp\{j(uX + vY)\}] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\exp\{j(ux + vy)\}\,dx\,dy. \qquad (3.42)$$

Соответствующее обратное преобразование записывается как

$$f(x, y) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{XY}(u, v) \exp\{-j(ux + vy)\}\, du\, dv. \quad (3.43)$$

Совместную характеристическую функцию можно использовать для определения корреляции случайных величин. Так, например,

$$E[XY] = \overline{XY} = -[\partial^2 \varphi_{XY}(u, v)/\partial u\, \partial v]_{u=v=0}. \quad (3.44)$$

В общем случае

$$E[X^l Y^k] = \overline{X^l Y^k} = (1/j^{l+k})\, [\partial^{l+k} \varphi_{XY}(u, v)/\partial u^l \partial v^k]_{u=v=0}. \quad (3.45)$$

Формулы (3.40), (3.43), (3.45) особенно широко используются для гауссовских случайных величин, поскольку для них всегда можно выполнить необходимые операции дифференцирования и интегрирования. Одно из полезных свойств гауссовского распределения случайных величин заключается в том, что для определения моментов и корреляции любого порядка этих величин достаточно знать их первый и второй моменты и коэффициент корреляции.

Упражнение 3.6.1. С помощью характеристической функции определите плотность распределения вероятностей случайной величины $Z = X + Y$, где X и Y — случайные величины из упр. 3.5.1.

Ответы должны совпасть с ответами к упр. 3.5.1.

Упражнение 3.6.2. Плотность распределения вероятностей случайной величины X имеет вид

$$f(x) = 2 \exp\{-4|x|\}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Определите с помощью характеристической функции первый и второй начальные моменты этой случайной величины.

Ответы: 0, 1/8.

ЗАДАЧИ

3.1.1. Двумерная функция распределения вероятностей случайных величин X и Y равна

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0, \quad y < 0, \\ xy, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 1, & x > 1, \quad y > 1. \end{cases}$$

а) Постройте график этой функции распределения.

б) Найдите двумерную плотность распределения вероятностей этих случайных величин и постройте ее график.

в) Определите, какова совместная вероятность события $\{X \leqslant 3/4,\ Y > 1/4\}$.

3.1.2. Двумерная плотность распределения вероятностей случайных величин X и Y равна

$$f(x, y) = \begin{cases} kxy, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & x < 0,\ x > 1, \quad y < 0,\ y > 1. \end{cases}$$

а) Определите, при каком значении k эту функцию действительно можно считать плотностью распределения вероятностей.

б) Найдите двумерную плотность распределения вероятностей $f(x, y)$.

в) Определите, какова совместная вероятность события $\{X \leqslant 1/2,\ Y > 1/2\}$.

г) Найдите одномерную плотность распределения вероятностей $f_X(x)$.

3.1.3. а) Определите $E[XY]$ для случайных величин X и Y из задачи 3.1.1.

б) Определите $E[XY]$ для случайных величин X и Y из задачи 3.1.2.

3.1.4. Пусть значения, принимаемые случайными величинами X и Y, соответствуют очкам, выпадающим на каждой из игральных костей в опыте с двумя костями. Определите:

а) совместную вероятность события $\{X \leqslant 3,\ Y > 3\}$,

б) $E[XY]$,

в) $E[X \mid Y]$.

3.2.1. Случайный сигнал X, подчиняющийся распределению Рэлея с математическим ожиданием 10, суммируется с шумом N, равномерно распределенным с нулевым математическим ожиданием и дисперсией 12. Значения X и N статистически независимы и могут наблюдаться только как суммарная величина $Y = X + N$.

а) Найдите условную плотность распределения вероятностей $f(x \mid y)$ и постройте ее графики для $y = 0$, $y = 6$ и $y = 12$.

б) Укажите, какова наиболее правдоподобная оценка истинного значения, принимаемого случайным сигналом X, если измеренное значение случайной величины Y равно 12.

3.2.2. Для двумерной плотности распределения вероятностей из задачи 3.1.2 найдите а) $f(x \mid y)$ и б) $f(y \mid x)$.

3.2.3. Случайное постоянное напряжение, распределенное равномерно в диапазоне от -5 до $+5$ В, измеряют в присутствии статистически независящего от него шумового напряжения, распределенного по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией 2 $В^2$.

а) Найдите условную плотность распределения вероятностей этого напряжения для заданного результата измерения и постройте ее график.

б) Найдите наиболее правдоподобную оценку этого напряжения, если результат измерения равен 6 В.

в) Найдите наиболее правдоподобную оценку этого напряжения, если результат измерения равен 7 В.

3.2.4. Случайный сигнал X всегда сопровождается статистически независимым аддитивным шумом N. Таким образом, наблюдаемой величиной является $Y = X + N$. Двумерная плотность вероятностей $f(x, y)$ равна

$$f(x, y) = K \exp[-(x^2 + y^2 + 4xy)], \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty.$$

а) Напишите общее выражение для определения наиболее правдоподобной оценки значения X как функции наблюдаемого значения y случайной величины Y.

б) Определите наиболее правдоподобную оценку величины X, считая, что измеренное значение случайной величины Y равно 3.

3.3.1. Установите, являются ли статистически независимыми случайные величины X и Y с приведенными ниже совместными плотностями распределения вероятностей и найдите корреляции $E[XY]$ этих случайных величин.

а)

$$f(x, y) = \begin{cases} kx/y, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 1 \leqslant y \leqslant 2, \\ 0, & x < 0,\ x > 1, \quad y < 1,\ y > 2. \end{cases}$$

б)

$$f(x, y) = \begin{cases} k(x^2 + y^2), & 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & x < 0,\ x > 1, \quad y < 0,\ y > 1. \end{cases}$$

в)

$$f(x, y) = \begin{cases} k(xy + 2x + 3y + 6), & 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & x < 0,\ x > 1, \quad y < 0,\ y > 1. \end{cases}$$

3.3.2. Пусть X и Y — статистически независимые случайные величины и пусть $W = g(X)$ и $V = h(Y)$ — любые функции этих случайных величин, имеющие непрерывные производные по X и Y. Покажите, что W и V также являются статистически независимыми случайными величинами.

3.4.1. Две случайные величины имеют нулевые математические ожидания и дисперсии, равные соответственно 16 и 36. Коэффициент корреляции этих величин равен 0,5. Определите:

а) дисперсию суммы этих величин;

б) дисперсию разности этих величин;

в) дисперсию суммы и разности этих величин, если коэффициент корреляции равен —0,5.

3.4.2. Дисперсии случайных величин X и Y равны соответственно $\sigma_X^2 = 9$ и $\sigma_Y^2 = 25$. Рассмотрим случайные величины $U = 3X + 4Y$ и $V = 5X - 2Y$. Определите:

а) дисперсии σ_U^2 и σ_V^2 случайных величин U и V,

б) коэффициент корреляции этих случайных величин.

3.4.3. Пусть X и Y — случайные величины с нормальными распределениями и нулевыми математическими ожиданиями, причем дисперсия X равна 9. Дисперсия суммы этих случайных величин равна 29, а разности — 21. Определите:

а) дисперсию σ_Y^2 случайной величины Y.

б) коэффициент корреляции случайных величин X и Y,

в) дисперсию случайной величины $U = 3X - 5Y$.

3.4.4. Суммированием трех случайных величин X, Y и Z, имеющих нулевые математические ожидания и единичные дисперсии, получают случайную величину $W = X + Y + Z$. Случайные величины X и Y некоррелированы, а коэффициенты корреляции пар случайных величин (X, Z) и (Y, Z) равны соответственно 0,5 и —0,5. Определите:

а) дисперсию случайной величины W,

б) коэффициент корреляции случайных величин W и X,

в) коэффициент корреляции случайной величины W и суммы случайных величин Y и Z.

3.5.1. Плотность вероятностей случайной величины X равна

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & x < 0,\ x > 1, \end{cases}$$

а статистически не зависящая от X случайная величина Y равномерно распределена на интервале от —1 до +1.

а) Запишите плотность распределения вероятностей случайной величины $Z = X + 2Y$.

б) Определите вероятность того, что $0 < Z \leqslant 1$.

3.5.2. Пассажир каждое утро ездит в город восьмичасовым утренним поездом, реальное время прибытия которого на станцию является случайной величиной, равномерно распределенной в интервале от 7 ч 55 мин до 8 ч 05 мин. Время отправления этого поезда от станции также представляет собой случайную величину, равномерно распределенную в интервале от 8 ч 00 мин до 8 ч 10 мин.

а) Найдите плотность распределения вероятностей интервала времени между моментами прибытия пассажира на станцию и отправления поезда.

б) Определите вероятность того, что пассажир успеет сесть на поезд.

в) Определите вероятность того, что пассажир успеет сесть на поезд, задержавшись на 3 минуты в дорожной пробке.

3.5.3. Пусть имеется гармонический сигнал вида

$$X(t) = \cos(100t + \Theta),$$

где Θ — случайная величина, равномерно распределенная на интервале от 0 до 2π. Другой гармонический сигнал имеет вид

$$Y(t) = \cos(100t + \Psi),$$

где Ψ — статистически не зависящая от Θ случайная величина, также равномерно распределенная на интервале от 0 до 2π. Сумма этих двух сигналов $Z(t) = X(t) + Y(t)$ может быть выражена через свою амплитуду A и фазу Φ

$$Z(t) = A\cos(100t + \Phi).$$

Определите вероятность того, что:

а) $A > 1$, б) $A \leqslant 1/2$.

3.5.4. Во многих системах связи используется пакетная передача данных от ЭВМ. При этом формируется группа двоичных разрядов (порядка 1000), передаваемая как единый пакет. Временной интервал между пакетами представляет собой случайную величину, распределение которой обычно подчиняется экспоненциальному закону, а математическое ожидание обратно пропорционально среднему числу передаваемых за одну секунду пакетов. При некоторых условиях начало передачи должно задерживаться, причем длительность задержки является случайной величиной, распределенной равномерно в интервале от 0 до T. Считая, что в секунду должно передаваться 100 пакетов, а максимальная продолжительность задержки $T = 1$ мс, определите

а) плотность вероятностей временного интервала между пакетами,

б) математическое ожидание этого интервала.

3.6.1. Плотность распределения вероятностей случайной величины X равна $f_X(x) = u(x)\,e^{-x}$, а статистически не зависящей от нее случайной величины Y — $f_Y(y) = 3u(y)\,e^{-3y}$. Найдите при помощи метода характеристических функций плотность вероятностей случайной величины $Z = X + Y$.

3.6.2. а) Найдите характеристическую функцию гауссовской случайной величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2.

б) Проверьте с помощью метода характеристических функций результат, полученный в разд. 2.5 для n-го центрального момента гауссовской случайной величины.

3.6.3. Характеристическая функция случайной величины X, подчиняющейся распределению Бернулли, равна $\varphi(u) = 1 - p + pe^{ju}$, где p — вероятность того, что событие случится в одном испытании. Для этой случайной величины определите:

а) математическое ожидание,

б) значение среднего квадрата,

3) 3-й центральный момент.

ЛИТЕРАТУРА

См. список литературы к гл. 1, в особенности [2, 6, 8].

Глава 4

Элементы математической статистики

4.1. Введение

Теперь, когда мы рассмотрели основные понятия теории вероятностей, желательно перейти к некоторым ее важным практическим приложениям. Одно из них лежит в области математической статистики. Хотя основная цель этой книги заключается в том, чтобы научить читателя применять теорию вероятностей для анализа сигналов и систем, стоит кратко обсудить основные понятия математической статистики, которая настолько важна для инженера, что без такого обсуждения изложение будет неполным. Однако если читатель пропустит настоящую главу (например, из-за нехватки времени), то не испытает затруднений в понимании материала последующих глав.

Теорию вероятностей и математическую статистику часто рассматривают как одно целое и поэтому в учебниках и курсах лекций излагают совместно. Однако в действительности это две самостоятельные области знания, хотя математическая статистика в значительной мере и опирается на понятия теории вероятностей. Более того, определяя математическую статистику как науку, обычно о вероятностях вообще не упоминают. Вместо этого говорят о накоплении, систематизации и анализе фактов или экспериментальных данных. В очевидном согласии с таким определением в одном распространенном учебнике по математической статистике понятие вероятности вводится лишь в восьмой главе!

В математической статистике можно выделить два основных направления: описательную статистику и индуктивную статистику (статистический вывод). Описательная статистика занимается накоплением, систематизацией и представлением экспериментальных данных в удобной форме. Индуктивная статистика на основе этих данных позволяет сделать определенные выводы относительно объектов, о которых собраны данные, или оценить их параметры.

Область приложения математической статистики чрезвычайно обширна, и в ней можно выделить несколько направлений. Для

наших целей достаточно рассмотреть следующие теоретические направления:

а) *теория выборок*, посвященная методам формирования выборок из генеральной совокупности экспериментальных данных, объем которой настолько велик, что не позволяет проанализировать ее целиком;

б) *теория оценок*, определяющая методы и способы оценки неизвестных параметров распределений совокупности или решения задачи предсказания исходя из экспериментальных данных;

в) *проверка статистических гипотез* (тесты), используемая, если нужно решить, какое из предположений о распределении экспериментальных данных более правдоподобно;

г) *регрессионный анализ*, задачей которого является подбор математических формул, наилучшим образом описывающих экспериментальные данные;

д) *дисперсионный анализ*, позволяющий оценить разброс экспериментальных данных и сопоставить его с конкретной ситуацией, к которой относятся данные.

Естественно, что все перечисленные разделы невозможно подробно рассмотреть в одной короткой главе, поэтому мы ограничимся лишь некоторыми простыми понятиями математической статистики, теории выборок, проверки статистических гипотез и методом линейной регрессии, приложение которого будет проиллюстрировано на ряде примеров.

4.2. Теория выборок и выборочное среднее

При массовом промышленном производстве часто нужно без проверки каждого выпускаемого изделия установить, соответствует ли качество продукции установленным стандартам. Обычно число изделий столь велико, что проверка каждого из них оказывается практически невозможной. В таких ситуациях целесообразно проверять параметры ограниченного числа изделий и считать, что результаты проверки справедливы для всей партии. Подобные задачи встречаются также при опросах общественного мнения, определении популярности телевизионных программ или нахождении средних значений параметров объектов, составляющих некоторую генеральную совокупность.

Задачи перечисленных типов решаются путем изучения выборок, сформированных из определенной совокупности объектов или экспериментальных данных. Чтобы полученный при решении задачи результат обладал заданной степенью достоверности, выборка должна иметь достаточный для этого объем. Понятно, что, исходя из мнения случайного прохожего, трудно предсказать исход президентских выборов. Точно так же нельзя утверждать, что все транзисторы из партии в 1 млн. шт. годны или негодны,

проверив только один из них. С другой стороны, поскольку процесс отбора образцов для испытаний может оказаться длительным и привести к дополнительным расходам, объем выборки должен быть оптимальным. Одна из целей данного раздела — определить, каков должен быть объем выборки, чтобы полученные в ходе ее исследования результаты отвечали бы заданным требованиям достоверности.

Обратимся к основным понятиям теории выборок. Всю совокупность изучаемых объектов или экспериментальных данных будем называть *генеральной совокупностью*. Например, можно считать, что все выпущенные в составе данной серии устройства составляют генеральную совокупность. В задаче о предсказании исхода президентских выборов генеральной совокупностью можно считать численность населения, участвующего в выборах. Будем обозначать через N число объектов или количество данных, составляющих генеральную совокупность. Величину N называют *объемом* генеральной совокупности. Если N невелико, то его конкретное значение нужно учитывать в процессе решения задачи. Если же N велико, то обычно удобнее считать $N = \infty$. Расчеты параметров генеральной совокупности при $N = \infty$ часто выполнять легче, чем при конечном N, и, как скоро станет ясно, при очень больших N практически не играет роли, использовать ли конкретное значение N или полагать $N = \infty$.

Случайной выборкой или просто *выборкой* называют часть генеральной совокупности, наугад отобранную из нее. Как упоминалось в гл. 1, слово «наугад» означает, что вероятности выбора любого объекта генеральной совокупности одинаковы. Это очень важное предположение, однако часто трудно удостовериться в его справедливости. *Объемом выборки n* называют число объектов или количество данных, составляющих выборку.

Выборка характеризуется различными параметрами, но один из наиболее важных — *выборочное среднее*. Обычно на практике каждому элементу выборки можно поставить в соответствие некоторое число. Очевидно, существуют выборки других типов, например такие, которые формируются при опросах общественного мнения, когда объектам нельзя приписать численных значений, однако здесь мы не будем рассматривать ситуации такого рода. Пусть из генеральной совокупности объемом N сформирована выборка объемом n, при этом элементам выборки приписаны соответственно числовые значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Если, к примеру, указанная выборка формируется в процессе контроля качества производимых биполярных транзисторов посредством измерения их коэффициентов усиления по постоянному току β_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, то каждое измеренное значение β_i следует рассматривать как элемент x_i исследуемой выборки. Предположим также, что данная выборка является случайной и все ее элементы

принадлежат к некоторой генеральной совокупности. При этом среднее значение для выборки измеренных элементов x_i называют *эмпирическим выборочным средним*. Можно ожидать, что эмпирическое выборочное среднее не будет заметно отличаться от среднего генеральной совокупности, из которой эта выборка сформирована. Оценка отклонения выборочного среднего от генерального среднего — одна из задач, рассмотренных в настоящей главе.

Для данной конкретной выборки ее выборочное среднее обозначается как

$$\bar{x} = (1/n) \sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{4.1}$$

где x_i — значения элементов выборки. Обычно требуется описать статистические свойства произвольных случайных выборок, а не какой-то одной из них. В этом случае выборочные средние, так же как и элементы выборки, рассматриваются как случайные величины. При этом выборочное среднее удобнее обозначить как

$$\widehat{\overline{X}} = (1/n) \sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{4.2}$$

где X_i — случайные величины с плотностью распределения вероятностей $f(x)$, принадлежащие к генеральной совокупности. Обратите внимание на то, что мы будем по-прежнему обозначать случайные величины и принимаемые ими значения соответственно прописными и строчными буквами. В этой главе будет использоваться именно такая форма записи, и важно уметь отличать общие результаты, полученные для случайных величин, от результатов, полученных для ситуации, в которой эти величины принимают конкретные значения.

Среднее значение для генеральной совокупности, из которой производится выборка, будем называть *генеральным средним* и обозначать $\overline{X}$. Можно ожидать, что выборочное среднее не будет заметно отличаться от генерального среднего. Поскольку обычно выборочное среднее является случайной величиной, для него можно найти математическое ожидание

$$E[\widehat{\overline{X}}] = E\left[(1/n) \sum_{i=1}^{n} X_i\right] = (1/n) \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = (1/n) \sum_{i=1}^{n} \overline{X} = \overline{X}.$$

Таким образом, математическое ожидание выборочного среднего равно генеральному среднему. Говорят, что выборочное среднее является *несмещенной оценкой* генерального среднего. Термин «несмещенная оценка», широко употребляющийся в математической статистике, означает, что математическое ожидание оценки параметра равно математическому ожиданию параметра.

Всегда желательно, чтобы выборочное среднее было несмещенной оценкой генерального среднего, однако этого недостаточно, чтобы утверждать, что эта оценка состоятельна. Поскольку выборочное среднее само представляет собой случайную величину, принимаемые им значения для конкретных выборок (эмпирические выборочные средние) флуктуируют около генерального среднего. Желательно оценить эту флуктуацию, т. е. определить дисперсию выборочного среднего. Рассмотрим сначала выборку, объем которой много меньше объема генеральной совокупности, $n \ll N$. Предположим, что при формировании выборок характеристики генеральной совокупности не меняются. Такое предположение эквивалентно условию $N = \infty$.

Чтобы определить дисперсию выборочного среднего (*выборочную дисперсию*) $D(\widehat{\overline{X}})$, найдем разность между средним квадратом и квадратом математического ожидания случайной величины $\widehat{\overline{X}}$, которое, как мы знаем, равно генеральному среднему $\overline{X}$. Таким образом,

$$D(\widehat{\overline{X}}) = E\left[(1/n)^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_i X_j\right] - (\overline{X})^2 =$$

$$= (1/n)^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} E[X_i X_j] - (\overline{X})^2. \qquad (4.3)$$

Поскольку X_i и X_j — параметры элементов генеральной совокупности, при $i \neq j$ их можно считать статистически независимыми случайными величинами. Следовательно,

$$E[X_i X_j] = \begin{cases} \overline{X^2}, & i = j, \\ (\overline{X})^2, & i \neq j. \end{cases}$$

Подстановка полученного результата в (4.3) дает

$$D(\widehat{\overline{X}}) = (1/n)^2 [n\,\overline{X^2} + (n^2 - n)(\overline{X})^2] - (\overline{X})^2 = (\overline{X^2} - (\overline{X})^2)/n = \sigma^2/n' \qquad (4.4)$$

где σ^2 — дисперсия генеральной совокупности (*генеральная дисперсия*). Обратите внимание на то, что с ростом n величина $D(\widehat{\overline{X}})$ уменьшается. Таким образом, увеличение объема выборки приводит к повышению точности оценки генерального среднего, поскольку математическое ожидание выборочного среднего всегда равно генеральному среднему независимо от объема выборки, а выборочная дисперсия $D(\widehat{\overline{X}})$ при увеличении n уменьшается.

Как уже отмечалось, формула (4.4) получена в предположении, что $N = \infty$. Существует другой подход, позволяющий получить тот же результат. Напомним, что основная причина предположения $N = \infty$ связана с требованием статистической устойчивости характеристик генеральной совокупности при формировании выборок. Пусть генеральная совокупность состоит из пяти 10-омных и пяти 100-омных резисторов. Если из нее удалить всего один резистор, то в ней возникнет иное соотношение между резисторами различных номиналов. Однако если бы в генеральной совокупности было по миллиону резисторов каждого номинала, то при удалении из нее одного резистора или даже тысячи резисторов соотношение количеств резисторов различных номиналов осталось бы в ней практически неизменным. Характеристики генеральной совокупности остаются статистически устойчивыми и при условии, что взятые из нее объекты после исследования возвращаются обратно. Поскольку при этом все объекты берутся из сохраняющей свои характеристики генеральной совокупности, такая ситуация аналогична формированию выборки из генеральной совокупности с $N = \infty$. Естественно, какой-то объект может быть выбран более одного раза, но из-за случайности процесса это мало повлияет на полученные результаты. Выборка, сформированная таким образом, называется *выборкой с возвращением* или *повторной выборкой*.

Иногда объекты нельзя возвратить в генеральную совокупность. Например, после испытаний на продолжительность службы или испытаний с разрушением объекта. Нежелательно также более одного раза опрашивать одного человека при опросе общественного мнения или,. например, при определении популярности телевизионных программ. Однако выборочную дисперсию можно найти даже при малом объеме выборки. Приведем без доказательства используемую для этого формулу:

$$D(\widehat{\overline{X}}) = \sigma^2 (N - n)/n(N - 1). \tag{4.5}$$

Обратите внимание на то, что при $N \to \infty$ формула (4.5) сводится к (4.4), а при $N = n$ выборочная дисперсия равна 0. Это понятно, поскольку при $N = n$ все объекты генеральной совокупности входят в выборку и выборочное среднее равняется генеральному среднему. Однако понятно и то, что при испытаниях с разрушением такая ситуация невозможна. Проиллюстрируем сказанное с помощью двух примеров. Сначала рассмотрим генеральную совокупность с $N = \infty$. Оценим с помощью выборки математическое ожидание показанного на рис. 4.1 случайного сигнала с математическим ожиданием и дисперсией, соответственно равными 10 и 9.

Как видно на рис. 4.1, отсчеты сигнала берутся в равноотстоящие моменты времени t_1, t_2, ..., t_n. Обычно отсчеты являются случайными величинами, будем обозначать их $X_i = X(t_i)$, $i = 1, 2, ..., n$. Определим, сколько отсчетов нужно, чтобы среднее квадратическое отклонение оценки математического ожидания сигнала не превысило 1 % его математического ожидания. Если сигнал не ограничен во времени, то объем генеральной совокупности отсчетов $N = \infty$ и из (4.4) следует, что

$$D(\widehat{\overline{X}}) = \sigma^2/n = 9/n = (0{,}01 \cdot 10)^2 = 0{,}01,$$

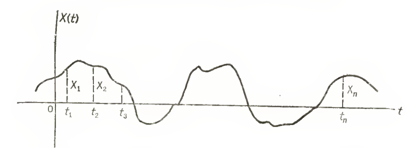


Рис. 4.1. Случайный сигнал, из которого формируется выборка.

где в правой части равенства стоит требуемая дисперсия оценки, соответствующая среднему квадратическому отклонению, равному 0,01 математического ожидания сигнала. Отсюда $n = 9/0{,}01 = 900$. Из этого результата следует, что для обеспечения малой дисперсии оценки генерального среднего при $N = \infty$ или при формировании выборки с возвращением требуется достаточно большой объем выборки.

Естественно, если оценить с полученной дисперсией математическое ожидание случайной функции времени, мы не можем гарантировать, что в конкретной ситуации оценка будет отличаться от математического ожидания менее чем на 1 %. Тем не менее мы можем определить вероятность того, что разность между математическим ожиданием и его оценкой не будет превышать 1 % (или любую другую долю) математического ожидания. Для этого необходимо знать плотность распределения вероятностей оценки $\widehat{\overline{X}}$. Поскольку при большом объеме выборки выборочное среднее находится в результате суммирования большого числа независимых случайных величин, справедлива центральная предельная теорема и выборочная плотность вероятностей близка к гауссовской и мало зависит от плотностей вероятностей отдельных выборочных значений. Таким образом, вероятность события,

заключающегося в том, что $\widehat{\overline{X}}$ будет отличаться от $\overline{X}$ не более чем на 1 %, равна

$$P(9{,}9 < \widehat{\overline{X}} \leqslant 10{,}1) = F(10{,}1) - F(9{,}9) =$$
$$= \Phi[(10{,}1 - 10)/0{,}1] - \Phi[(9{,}9 - 10)/0{,}1] =$$
$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0{,}8413 - 1 = 0{,}6826.$$

Следовательно, вероятность того, что $\widehat{\overline{X}}$ будет отличаться от $\overline{X}$ более чем на 1 %, достаточно велика и равна 0,3174.

Предположение о гауссовском распределении выборочных средних довольно реалистично для выборки большого объема, но может оказаться несправедливым для выборки малого объема. Способ, пригодный для выборок малого объема, будет описан в одном из последующих разделов.

Рассмотрим второй пример с генеральной совокупностью небольшого объема, из которой выборка формируется без возвращения. Пусть генеральная совокупность состоит из 100 биполярных транзисторов, и нужно оценить их средний коэффициент усиления по току β. Если генеральное среднее $\overline{\beta} = 120$ и генеральная дисперсия $\sigma_\beta^2 = 25$, то каков должен быть объем выборки, чтобы среднее квадратическое отклонение выборочного среднего составляло 1 % генерального среднего? Поскольку желаемая дисперсия оценки генерального среднего равна $D(\widehat{\overline{\beta}}) = (0{,}01 \cdot 120)^2 = 1{,}44$, из (4.5) следует, что $(25/n)\,[(100 - n)/(100 - 1)] = 1{,}44$. Отсюда $n = 14{,}92$, а поскольку объем выборки должен выражаться целым числом, $n = 15$. Сравнительно небольшой объем выборки объясняется малым объемом генеральной совокупности. Если бы в рассматриваемом примере объем выборки был равен 100 (т. е. в нее входили бы все элементы генеральной совокупности), то дисперсия выборочного среднего равнялась бы 0.

Можно также определить вероятность того, что выборочное среднее будет отличаться от генерального среднего менее чем на 1 %, однако в рассматриваемом примере плотность распределения вероятностей выборочного среднего нельзя считать гауссовской, если, конечно, коэффициенты β сами не являются гауссовскими случайными величинами. Это связано с тем, что объем выборки $n = 15$ слишком мал для применения центральной предельной теоремы. Известно эмпирическое правило: чтобы выборочную плотность вероятностей можно было считать гауссовской, объем выборки n должен быть не менее 30. Способ, используемый при $n < 30$, будет описан, когда будут рассматриваться различные законы выборочных распределений вероятностей.

Упражнение 4.2.1. У каждого сотого из выпускаемых большой партией полупроводниковых диодов измеряют прямой ток $I_{пр}$ и обратный ток $I_{обр}$ при напряжениях +1 и −1 В.

а) Если математическое ожидание и дисперсия случайной величины $I_{обр}$ соответственно равны 10^{-6} А и 10^{-11} А^2, то сколько диодов нужно проверить, чтобы среднее квадратическое отклонение выборочного среднего не превысило 5 % математического ожидания $I_{обр}$?

б) Если математическое ожидание и дисперсия случайной величины $I_{пр}$ соответственно равны 0,1 А и 0,0025 А^2, то сколько диодов нужно проверить, чтобы среднее квадратическое отклонение выборочного среднего не превысило 1 % математического ожидания $I_{пр}$?

в) Если бы в обеих проверках объемы выборок были одинаковы и равны большему из объемов, определенных в пп. (а) и (б), то чему были бы равны средние квадратические отклонения выборочных средних $I_{пр}$ и $I_{обр}$?

Ответы: $5 \cdot 10^{-8}$ А, 2500, 0,00079 А, 4000.

Упражнение 4.2.2. Партию из 80 резисторов нужно проверить с помощью выборки без возвращения, причем среднее квадратическое отклонение выборочного среднего сопротивления не должно превысить 2 % генерального среднего.

а) Каков должен быть объем выборки, если генеральное среднее сопротивление и генеральное среднее квадратическое отклонение сопротивления резисторов были соответственно равны 100 и 5 Ом?

б) Выполните предыдущее упражнение, если генеральное среднее равно 100 Ом, а среднее квадратическое отклонение сопротивления резисторов равно 1 Ом.

в) Для выборки из 10 резисторов определите среднее квадратическое отклонение выборочного среднего сопротивления, если генеральное среднее и генеральное среднее квадратическое отклонение соответственно равны 100 и 1 Ом.

Ответы: 1, 59, 0,3 Ом.

4.3. Выборочная дисперсия

В предыдущем разделе рассматривались вопросы, связанные с оценкой среднего значения случайных величин, составляющих генеральную совокупность, путем усреднения по всем элементам выборки, сформированной из этой совокупности. Была также найдена дисперсия этой оценки и показано, как она зависит от объема выборки. Однако кроме математического ожидания нас может также интересовать и дисперсия случайных величин, принадлежащих к генеральной совокупности. Знание дисперсии важно, поскольку показывает разброс значений случайных величин относительно их математического ожидания. Например, при измерении сопротивлений резисторов мало найти, что выборочное среднее сопротивление незначительно отличается от номинального. Если среднее квадратическое отклонение сопротивления велико, то независимо от того, насколько выборочное среднее сопротивление близко к номинальному, сопротивления многих резисторов могут сильно отличаться от него. Следовательно, нужно знать не только генеральное среднее, но и генеральную дисперсию.

Есть еще одна причина, по которой нужно оценивать генеральную дисперсию. Напомним, что генеральная дисперсия входит в формулу для определения объема выборки, при котором удается

получить заданную дисперсию выборочного среднего. Сначала генеральная дисперсия может быть не известна и поэтому трудно определить, каким должен быть объем выборки. Оценка генеральной дисперсии обеспечит нас некоторой информацией о том, как нужно изменить объем выборки, чтобы получить приемлемые результаты.

Введем для выборочной дисперсии обозначение S^2, чтобы избежать путаницы с обозначениями дисперсии различных выборок. Выборочная дисперсия S^2 для выборки, состоящей из случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, равна

$$S^2 = (1/n) \sum_{i=1}^{n} (X_i - \widehat{X})^2 = (1/n) \sum_{i=1}^{n} \left[X_i - (1/n) \sum_{j=1}^{n} X_j \right]^2. \quad (4.6)$$

Обратите внимание на то, что последний член в квадратных скобках в правой части этого выражения есть выборочное среднее, так что S^2 представляет собой среднее значение квадрата разности случайных величин и выборочного среднего.

Математическое ожидание выборочной дисперсии S^2 можно найти, раскрыв в (4.6) скобки и определив математические ожидания каждого члена суммы. Выполнив простые, хотя и достаточно утомительные преобразования, получим, что

$$E\,[S^2] = \sigma^2\,(n-1)/n, \quad (4.7)$$

где σ^2 — генеральная дисперсия. Обратите внимание на то, что математическое ожидание выборочной дисперсии не равно генеральной дисперсии, таким образом, это смещенная оценка. В большинстве приложений хотелось бы иметь несмещенные оценки любого параметра. Поэтому желательно знать, есть ли простой способ получения несмещенной оценки генеральной дисперсии. Из выражения (4.7) следует, что для этого несмещенную оценку необходимо лишь умножить на $n/(n-1)$. Итак, несмещенную оценку генеральной дисперсии можно получить, определив выборочную дисперсию как

$$\widetilde{S}^2 = S^2 n/(n-1) = [1/(n-1)] \sum_{i=1}^{n} (X_i - \widehat{\widehat{X}})^2. \quad (4.8)$$

Формулы (4.7) и (4.8) справедливы для генеральной совокупности бесконечно большого объема. Если же объем генеральной совокупности ограничен и равен N, то

$$E\,[S^2] = \sigma^2 N\,(n-1)/n\,(N-1). \quad (4.9)$$

Обратите внимание на то, что (4.9) также дает смещенную оценку, однако смещение можно устранить, если $\widetilde{S}^2$ определить как

$$\widetilde{S}^2 = S^2 n\,(N-1)/N\,(n-1). \quad (4.10)$$

Обратите также внимание на то, что при $N \to \infty$ формулы (4.9) и (4.10) сводятся к (4.7) и (4.8).

Формулы для дисперсии оценок выборочной дисперсии можно получить, выполнив прямые, хотя и трудоемкие преобразования. Например, легко показать, что

$$D(S^2) = (\mu_4 - \sigma^4)/n, \tag{4.11}$$

где

$$\mu_4 = E\,[(X - \overline{X})^4] \tag{4.12}$$

есть генеральный центральный момент 4-го порядка. С учетом формул (4.7) и (4.8) сразу запишем

$$D(\widetilde{S}^2) = n\,(\mu_4 - \sigma^4)/(n-1)^2. \tag{4.13}$$

Для иллюстрации применения полученных результатов подходят только выборки большого объема. Для этого вновь обратимся к случайной функции времени, показанной на рис. 4.1, для которой уже определено выборочное среднее. Выше мы нашли, что для уменьшения среднего квадратического отклонения выборочного среднего до 1 % генерального среднего, объем выборки n должен равняться 900. Теперь предположим, что та же выборка объемом 900 элементов используется для определения выборочной дисперсии $\widetilde{S}^2$, и вычислим ее по формуле (4.8). Напомним, что $\widetilde{S}^2$ является несмещенной оценкой генеральной дисперсии. Если известен генеральный центральный момент 4-го порядка, то по формуле (4.13) можно найти дисперсию этой оценки. К сожалению, μ_4 вычислить нелегко, если только не известна плотность распределения вероятностей случайных величин, входящих в выборку. Для целей настоящего обсуждения предположим, что рассматриваемый случайный сигнал является гауссовским, а составляющие выборку случайные величины статистически независимы. Из выражения (2.27) следует, что для гауссовской случайной величины $\mu_4 = 3\sigma^4$. Подставив это значение в (4.13), получим

$$D(\widetilde{S}^2) = 900\,(3 \cdot 9^2 - 9^2)/(900 - 1)^2 = 0{,}1804,$$

поскольку дисперсия сигнала $\sigma^2 = 9$. Таким образом, среднее квадратическое отклонение оценки дисперсии равно 0,4247 или 4,72 % генеральной дисперсии. Отсюда можно сделать вывод, справедливый и в общем случае: для выборки заданного объема точность оценки генеральной дисперсии ниже точности оценки генерального среднего.

Если известна плотность распределения вероятностей оценки $\widetilde{S}^2$, то можно определить, какова вероятность попадания выборочной дисперсии в любой заданный интервал значений. Плотность распределения вероятностей $f(\widetilde{S}^2)$ при большом объеме выборки

можно считать гауссовской; такое же предположение справедливо для плотности распределения вероятностей выборочного среднего. Однако для выборок малого объема такое предположение неприемлемо. Более того, если выборка состоит из гауссовских случайных величин, то при любом объеме плотность распределения вероятностей $f(\tilde{S}^2)$ подчиняется хи-квадратичному закону.

Упражнение 4.3.1. Определите, каков должен быть объем выборки для показанного на рис. 4.1 случайного сигнала, чтобы среднее квадратическое отклонение оценки его дисперсии равнялось 1 % дисперсии, если

а) оценка несмещенная,

б) оценка смещенная.

Ответы: 20 000, 20 002.

Упражнение 4.3.2. Пусть плотность распределения вероятностей отсчетов случайной функции времени $X(t)$ равна

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Сколько нужно взять отсчетов, чтобы среднее квадратическое отклонение несмещенной оценки дисперсии этой функции равнялось 5 % ее дисперсии?

Ответ: 3133.

4.4. Плотности вероятностей оценок параметров генеральной совокупности и доверительный интервал

Хотя математические ожидания и дисперсии оценок параметров дают нужные сведения о генеральной совокупности, этого недостаточно, чтобы ответить на вопрос о вероятности попадания оценок в заданный интервал. Чтобы ответить на него, нужно знать плотности распределения вероятностей таких оценок параметра, как выборочное среднее или выборочная дисперсия. При разработке математической статистики определению плотностей вероятностей этих оценок было уделено значительное внимание, и много таких функций описано в литературе. Здесь мы рассмотрим лишь два закона распределения вероятностей выборочного среднего.

Напомним, что в соответствии с формулой (4.2) выборочное среднее равно

$$\widehat{\overline{X}} = (1/n) \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

где n — объем выборки, а X_i — случайные величины, принадлежащие к генеральной совокупности. Если эти случайные величины статистически независимы и распределены по нормальному закону с математическим ожиданием $\overline{X}$ и дисперсией σ^2, то центрированная и нормированная случайная величина

$$Z = (\widehat{\overline{X}} - \overline{X})/(\sigma/n^{1/2}) \tag{4.14}$$

также распределена по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Таким образом, если

распределение генеральной совокупности подчиняется нормальному закону, то выборочное среднее можно считать гауссовской случайной величиной независимо от объема генеральной совокупности или выборки при условии, что генеральное среднее квадратическое отклонение σ известно и его можно использовать для нормирования случайной величины в соответствии с выражением (4.14). С другой стороны, если распределение генеральной совокупности нельзя считать гауссовским, то из центральной предельной теоремы следует, что при $n \to \infty$ функция распределения вероятностей случайной величины Z асимптотически стремится к гауссовской. Следовательно, можно считать, что распределение выборочного среднего при больших n является гауссовским. Кроме того, если генеральная дисперсия σ^2 не известна, в (4.14) вместо σ можно использовать оценку $\widetilde{S}$, поскольку при больших n эта оценка должна приближаться к σ. Однако при этом возникает вопрос о том, каким должен быть объем выборки n и что делать, если n меньше, чем требуется?

Известно следующее эмпирическое правило: выборочное распределение можно считать гауссовским, если $n \geqslant 30$. Если $n < 30$, а распределение генеральной совокупности нельзя считать гауссовским, то, вообще говоря, каждую ситуацию приходится рассматривать с учетом конкретных характеристик. Однако если распределение генеральной совокупности является гауссовским, а генеральная дисперсия не известна, то нормированное выборочное среднее нельзя считать гауссовской случайной величиной, поскольку оценка $\widetilde{S}$, используемая при этом вместо σ в (4.14), также является случайной величиной. Тем не менее плотность распределения вероятностей нормированного выборочного среднего найти можно, и в дальнейшем будет показано, как это сделать.

Для $n < 30$ определим центрированное и нормированное выборочное среднее:

$$T = (\widehat{\overline{X}} - \overline{X})/(\widetilde{S}/n^{1/2}) = (\widehat{\overline{X}} - \overline{X})/[S/(n-1)^{1/2}]. \qquad (4.15)$$

Распределение случайной величины T называется *распределением Стьюдента* с $(n - 1)$ степенями свободы [1]).

Число степеней свободы распределения Стьюдента будем обозначать через $v = n - 1$. Тогда плотность вероятностей случайной величины T равна

$$f_T(t) = \Gamma((v+1)/2)\left(1 + t^2/v\right)^{-(v+1)/2}(v\pi)^{-1/2}[\Gamma(v/2)]^{-1}, \quad (4.16)$$

[1]) На существование распределения такого вида впервые указал Уильям Госсет, опубликовавший свою работу под псевдонимом «Стьюдент», поскольку сотрудникам фирмы «Гиннесс Брюэри», в которой он служил, не разрешалось публиковать работы под своим именем.

где Γ (...) — гамма-функция, важные свойства которой будут рассмотрены ниже. На рис. 4.2 приведены плотности вероятностей случайной величины, распределенной по закону Стьюдента при $v = 1$, и центрированной и нормированной гауссовской случайной величины. Видно, что распределение Стьюдента имеет более протяженные хвосты, чем распределение Гаусса. Однако при $n \geqslant 30$ кривые почти сливаются. Чтобы вычислить плотность распреде-

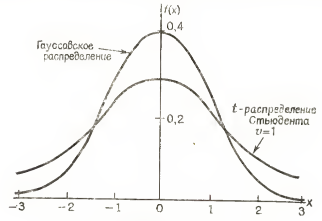


Рис. 4.2. Распределения Гаусса и Стьюдента.

ления Стьюдента, необходимо знать значения гамма-функции. Это нетрудно, поскольку можно воспользоваться известными соотношениями. Во-первых, существует рекуррентная формула

$$\Gamma(k+1) = \begin{cases} k\Gamma(k) & \text{при любом } k, \\ k! & \text{при целых } k. \end{cases} \qquad (4.17)$$

Во-вторых, приведем значения гамма-функции для некоторых аргументов:

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1, \quad \Gamma(1/2) = \pi^{1/2}.$$

Обратите внимание на то, что значения $f_T(t)$ ищутся для аргументов, являющихся либо целыми, либо полуцелыми числами. Найдем по формуле (4.17) значение гамма-функции для $k = 3{,}5$. Итак, $\Gamma(3{,}5) = 2{,}5\,\Gamma(2{,}5) = 2{,}5 \cdot 1{,}5\,\Gamma(1{,}5) = 2{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}5 \times \Gamma(0{,}5) = 2{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}5\pi^{1/2} = 3{,}323$.

При изучении математической статистики часто встречаются с понятием *доверительного интервала*. Хотя доверительный интервал чаще всего используется в теории оценок, удобнее обсудить его здесь в приложении к функциям распределения выборочного среднего. Выборочное среднее в определенном нами выше смысле представляет собой *точечную оценку*, поскольку ему может при-

писываться единственное значение. Кроме точечной, можно использовать *интервальную оценку*, которая утверждает, что оцениваемый параметр с определенной вероятностью принимает значение, лежащее в заданном интервале, называемом доверительным.

Интервал, в пределы которого оценка попадает с вероятностью $q/100$ %, будем называть q %-ным доверительным интервалом. Границы этого интервала называются доверительными, а q — *доверительным уровнем*.

Для выборочного среднего доверительный уровень q определяется следующим образом:

$$\overline{X} - k\sigma/n^{1/2} \leqslant \widehat{\overline{X}} \leqslant \overline{X} + k\sigma/n^{1/2}, \qquad (4.18)$$

где k — постоянная, связанная с q и плотностью распределения вероятностей $f_{\widehat{\overline{X}}}(x)$ случайной величины $\widehat{\overline{X}}$ соотношением

$$q = 100 \int\limits_{\overline{X}-k\sigma}^{\overline{X}+k\sigma} f_{\widehat{\overline{X}}}(x)\,dx. \qquad (4.19)$$

Если $f_{\widehat{\overline{X}}}(x)$ подчиняется нормальному закону, то зависимость k от q можно представить в виде таблицы. Значения k для нескольких q приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Ширина доверительного интервала для гауссовского распределения

q, %	k
90,00	1,64
95,00	1,96
99,00	2,58
99,90	3,29
99,99	3,89

Проиллюстрируем использование табл. 4.1 для выборки из 900 отсчетов случайного сигнала с генеральным средним 10 и генеральной дисперсией 9, показанного на рис. 4.1. Ширину доверительного интервала при $q = 95$ % легко найти, поскольку

$$10 - 1{,}96 \cdot 9^{1/2}/900^{1/2} \leqslant \widehat{\overline{X}} \leqslant 10 + 1{,}96 \cdot 9^{1/2}/900^{1/2},$$

или $9{,}804 \leqslant \widehat{\overline{X}} \leqslant 10{,}196$. Таким образом, в интервал от 9,804 до 10,196 выборочное среднее может попасть с вероятностью 0,95. Очевидно, что широким доверительным интервалам соответствуют большие доверительные уровни. Следовательно, вероятность попадания оценки в узкий доверительный интервал мала, а в широкий — велика. Поэтому ясно, что если сравниваются выборки одинакового объема, то оценка с $q = 99$ % хуже, чем, например, с $q = 90$ %.

Те же выводы относительно доверительных интервалов можно сделать исходя из плотности распределения вероятностей. Обратите внимание на то, что интеграл в (4.19) можно представить как

разность двух выборочных функций распределения вероятностей. Следовательно, (4.19) можно переписать в виде

$$q = 100\left[F_{\hat{\overline{X}}}(\overline{X} + k\sigma) - F_{\hat{\overline{X}}}(\overline{X} - k\sigma)\right]. \qquad (4.20)$$

Для распределения Стьюдента зависимость k от q также можно задать в виде таблицы, при этом параметром будет служить v. Однако чаще пользуются функцией распределения вероятностей $F_T(t)$. Таблица значений этой функции приведена в приложении E, а табл. 4.2 для $v = 8$ предназначена для использования в ходе дальнейшего рассмотрения.

Таблица 4.2

Распределение Стьюдента для $v = 8$

t	$F_T(t)$	t	$F_T(t)$
0,262	0,60	2,306	0,975
0,706	0,75	2,896	0,99
1,397	0,90	3,355	0,995
1,860	0,95		

Применение этой таблицы для проверки статистических гипотез будет проиллюстрировано в следующем разделе.

Упражнение 4.4.1. Найдите значение плотности распределения Стьюдента при $t = 1$, если

а) $v = 5$, б) $v = 10$.

Ответы: 0,2197, 0,2304.

Упражнение 4.4.2. Генеральное среднее и генеральная дисперсия сопротивлений резисторов, образующих генеральную совокупность бесконечно большого объема, соответственно равны 100 и 5 Ом. Выборочное среднее и выборочную дисперсию можно считать гауссовскими случайными величинами. Найдите границы 99 %-ного доверительного интервала для выборочного среднего, если объем выборки равен:

а) $n = 100$, б) $n = 9$.

Ответы: от 94,41 до 105,59, от 98,71 до 101,29.

4.5. Проверка статистических гипотез (тесты)

Принятие решений о параметрах генеральной совокупности является одним из важных приложений математической статистики. В предыдущих разделах было показано, как оценить выборочное среднее или выборочную дисперсию и как при заданном доверительном уровне найти границы доверительных интервалов. Кроме того, в отношении генеральной совокупности могут высказываться некоторые гипотезы, в справедливости которых можно удостовериться при изучении выборок. Пусть, например, по

утверждению фирмы средний срок службы выпускаемых ею электрических ламп равен 1000 ч. Таким образом, выдвинута гипотеза, согласно которой генеральное среднее соответствующей генеральной совокупности (элементами которой являются сроки службы всех выпущенных этой фирмой ламп) равно 1000 ч. Поскольку все лампы нельзя испытать на продолжительность службы, приходится испытывать лишь небольшое их количество и по полученным результатам определять выборочное среднее. Возникает вопрос: подтверждают ли результаты, полученные при испытании, принятую для генеральной совокупности статистическую гипотезу? Пусть выборочное среднее выборки всего из двух ламп оказалось равным 900 ч. Можно ли при этом утверждать, что высказанная статистическая гипотеза ошибочна? Очевидно нет, поскольку объем выборки слишком мал и по результатам ее анализа нельзя принять достоверное решение. С другой стороны, пусть для той же выборки выборочное среднее оказалось равным 1000 ч. Доказывает ли это справедливость гипотезы? Трудно сказать. Тогда поставим такой вопрос: как принимать решение о допущении или отклонении статистической гипотезы, если объем выборки и доверительный уровень заданы? Мы достаточно подготовлены для ответа, и дадим его, рассмотрев несколько конкретных примеров.

Тесты могут быть односторонними или двухсторонними. При одностороннем тесте нас интересует поведение параметра по одну сторону от заданного значения. В частности, в примере с электрическими лампами нужно, чтобы средняя продолжительность службы оказалась не менее 1000 ч, если же она окажется больше, то мы будем только рады. Такие ситуации встречаются часто. При двухстороннем тесте нас интересуют отклонения параметра от заданного значения в любом направлении. Пусть, например, нужно определить параметры генеральной совокупности резисторов с номинальным сопротивлением 100 Ом. Ясно, что при этом одинаково важны отклонения сопротивления в обе стороны от номинального.

Обратимся сначала к одностороннему тесту. Пусть, например, указано, что среднее пробивное напряжение конденсаторов равно или превышает 300 В. Испытав 100 конденсаторов, получили, что выборочное среднее равно 290 В, а несмещенное выборочное среднее квадратическое отклонение $\tilde{S}$ равно 40 В. Можно ли с 99 %-ным доверительным уровнем считать, что среднее пробивное напряжение превышает 300 В? Обратите внимание на то, что тест является односторонним, поскольку нас не интересует, насколько среднее пробивное напряжение превышает 300 В.

Сначала выскажем статистическую гипотезу: «генеральное среднее равно 300 В», а затем проверим, соответствует ли она результатам наблюдения. Поскольку объем выборки больше 30,

выборочную плотность вероятностей будем считать гауссовской, а $\sigma = \widetilde{S}$. Таким образом, центрированная и нормированная случайная величина Z принимает значение

$$z = (\widehat{\overline{X}} - \overline{X})/(\sigma/n^{1/2}) = (290 - 300)/(40/100^{1/2}) = -2{,}5.$$

Для одностороннего теста с $q = 99$ % критическое значение z_c находится с учетом того, что ему соответствует площадь под функцией $f_Z(z)$, равная 0,99. Следовательно,

$$\int\limits_{z_c}^{\infty} f_Z(z)\, dz = 1 - \Phi(z_c) = 0{,}99,$$

откуда $z_c = -2{,}33$. Поскольку наблюдаемое значение z меньше z_c, гипотезу нужно отвергнуть.

Часто при проверке статистической гипотезы трудно понять смысл полученного решения. В рассмотренном примере он состоит в том, что с вероятностью 0,99 исследуемая выборка не принадлежит к генеральной совокупности, генеральное среднее которой равно 300 В. Это вполне понятно, трудность, однако, заключается в том, что если бы мы взяли $q = 99{,}5$ %, то должны были бы принять эту гипотезу, поскольку критическое значение z_c для такого доверительного уровня равно $-2{,}575$ и меньше наблюдаемого значения z. Таким образом, при больших q увеличивается вероятность того, что любая выборка приведет к принятию гипотезы. На первый взгляд это противоречит логике, однако ясно, в чем здесь причина: чем бо́льше q, тем шире доверительный интервал, поскольку в него должен укладываться больший участок плотности распределения вероятностей. И обратно, чем меньше q, тем меньше вероятность того, что любая выборка приведет к принятию статистической гипотезы, и, таким образом, это более строгое требование. Иногда вместо доверительного уровня пользуются *уровнем значимости* $(100 - q)$ %, так как при этом удается обойти кажущееся противоречие. Тогда доверительному уровню 99 % соответствует уровень значимости 1 %, а доверительному уровню 99,5 % — уровень значимости 0,5 %. Таким образом, больший уровень значимости соответствует более строгой проверке гипотезы.

Вернемся к примеру с конденсаторами, однако теперь рассмотрим выборку малого объема. Пусть для выборки из 9 конденсаторов выборочное среднее пробивное напряжение равно 290 В, а несмещенное выборочное среднее квадратическое отклонение равно 40 В. Обратите внимание на то, что эти значения совпадают с приведенными для выборки большого объема. Однако,

поскольку теперь $n < 30$, значение t, принимаемое стьюдентовской случайной величиной T, равно

$$t = (\widehat{\overline{X}} - \overline{X})/\widetilde{S}/(n^{1/2}) = (290 - 300)/(40/9^{1/2}) = -0{,}75.$$

Для распределения Стьюдента $F_T(t)$ при $v = n - 1 = 8$ и $q = 99$ % из табл. 4.2 найдем критическое значение $t_c = -2{,}896$. Поскольку теперь $t > t_c$, мы должны принять гипотезу о том, что генеральное среднее пробивное напряжение конденсаторов превышает 300 В.

Обратите внимание на то, что для выборки меньшего объема t больше, а следовательно, увеличивается вероятность того, что оно превысит t_c. Кроме того, для выборок малого объема следует использовать распределение Стьюдента, которое имеет более протяженный хвост, чем гауссовское распределение, и $t_c < z_c$. Таким образом, при совместном действии обоих факторов достоверность тестов для выборок малого объема уменьшается.

Приведем пример двухстороннего теста. Пусть указывается, что номинальное напряжение стабилизации стабилитронов некоторого типа равно 10 В. Поскольку стабилитрон используется как регулятор, отклонения напряжения стабилизации от номинального как в большую, так и в меньшую стороны одинаково нежелательны. Итак, предположим, что генеральное среднее напряжение стабилизации равно 10 В, а затем проверим эту статистическую гипотезу и решим (с учетом того, что отклонения напряжения стабилизации от 10 В в обе стороны одинаково важны), справедлива ли она.

Пусть для выборки объемом 100 стабилитронов выборочное среднее равно 10,3 В и несмещенное выборочное среднее квадратическое отклонение равно 1,2 В. Можно ли с доверительным уровнем $q = 95$ % считать, что гипотеза справедлива? Поскольку объем выборки больше 30, можно ввести гауссовскую случайную величину Z, принимающую в этом примере значение $z = (10{,}3 - 10)/(1{,}2/100^{1/2}) = 2{,}5$. По табл. 4.1 находим, что для $q = 95$ %, $z_c = \pm 1{,}96$. Таким образом, чтобы гипотеза была принята (т. е. была состоятельной) значения z должны находиться в интервале $-1{,}96 \leqslant z \leqslant 1{,}96$. Поскольку $z = 2{,}5$ находится вне этого интервала, гипотеза отвергается (т. е. признается несостоятельной) и приведенные данные о среднем напряжении стабилизации нельзя считать верными, так как с вероятностью 0,95 испытуемая выборка не может быть сформирована из генеральной совокупности с генеральным средним 10 В.

Рассмотрим теперь выборку малого объема. Пусть снова проверяются 9 стабилитронов и установлено, что выборочное среднее и несмещенное выборочное среднее квадратическое отклонение

по-прежнему соответственно равны 10,3 и 1,2 В. Стьюдентовская случайная величина T принимает значение

$$t = (\widehat{\overline{X}} - \overline{X})/(\widehat{S}/n^{1/2}) = (10{,}3 - 10)/(1{,}2/9^{1/2}) = 0{,}75.$$

В этом примере $v = 8$, и критические значения t_c могут быть взяты из табл. 4.2. Поскольку в этой таблице приведены значения для распределения Стьюдента, а нам нужно найти границы расположенного симметрично относительно нуля интервала, соответствующего 95 % всей площади под кривой плотности распределения вероятностей, выше t_c будет лежать 2,5 % площади, а ниже t_c — также 2,5 % площади. Таким образом, из табл. 4.2 нужно выбрать $F_T(t_c) = 0{,}975$. Это легко понять, если записать соотношение $\mathrm{P}[-t_c < T \leqslant t_c] = F_T(t_c) - F_T(-t_c) = 2F_T(t_c) - 1 = 0{,}95$, откуда $F_T(t_c) = 1{,}95/2 = 0{,}975$. По табл. 4.2 находим, что $t_c = 2{,}306$. Чтобы принять гипотезу, наблюдаемое значение t должно находиться в интервале $-2{,}306 < t \leqslant 2{,}306$. Поскольку $t = 0{,}75$ находится внутри его, гипотеза принимается и заявление о том, что среднее напряжение стабилизации равно 10 В, считают верным. И вновь мы видим, что при большем объеме выборки проверка оказывается строже, чем при малом.

Упражнение 4.5.1. Для биполярных транзисторов определенного типа указывается, что средний их коэффициент усиления по постоянному току $\beta \geqslant 200$. При испытании установлено, что выборочный средний коэффициент усиления равен 190 и его несмещенное выборочное среднее квадратическое отклонение равно 40. Можно ли с вероятностью 0,95 считать, что для транзисторов этого типа $\beta \geqslant 200$, если объем выборки равен

а) 100? б) 20?

Ответы: $z = -2{,}5$; $z_c = -1{,}645$: нет; $t = -1{,}118$; $t_c = -1{,}729$: да.

Упражнение 4.5.2. Для биполярных транзисторов некоторого типа указывается, что их средний допустимый ток коллектора равен 4 мА. При испытании установлено, что выборочный средний допустимый ток равен 4,2 мА и несмещенное выборочное среднее квадратическое отклонение этого тока равно 0,8 мА. Можно ли с вероятностью 0,95 считать, что средний допустимый ток коллектора транзисторов этого типа равен 4 мА, если объем выборки равен:

а) 100? б) 20?

Ответы: $z = 2{,}5$, $z_c = \pm 1{,}96$: нет; $t = 1{,}118$; $t_c = \pm 2{,}090$: да.

4.6. Аппроксимация экспериментальных данных и линейная регрессия

Тема, которой посвящен этот раздел, стоит в стороне от вопросов, изложенных в предыдущих разделах, однако она отражает одно из важных приложений математической статистики к инженерной практике. Часто при анализе статистических данных выясняется, что между двумя и более случайными величинами имеется связь, которую нужно описать математически. Например, рассмотрим совокупность статистических данных, описывающих зависимость продолжительности службы электрических ламп от

поданного на них напряжения. Эти данные можно представить в виде диаграммы рассеяния (рис. 4.3), на которой каждой точке соответствует продолжительность службы, экспериментально найденная при данном напряжении.

Приведенная на этом рисунке непрерывная линия наилучшим в некотором смысле образом аппроксимирует экспериментальные данные и определяет соответствующую математическую зависимость между ними в форме функции определенного аргумента. Цель настоящего раздела — продемонстрировать один способ получения такого математического выражения.

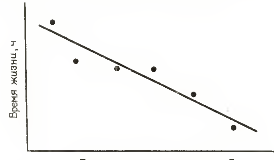


Рис. 4.3. Диаграмма рассеяния экспериментальных данных о продолжительности службы электрических ламп в зависимости от приложенного к ним напряжения.

В последующем для удобства будем как под аргументом, так и под функцией понимать случайные величины X и Y соответственно. Поскольку экспериментальные данные, рассматриваемые нами, представляют собой наборы чисел, то, придерживаясь принятой выше системы обозначений, при их записи будем использовать подстрочные индексы. Таким образом, если объем выборки равен n, значения, принимаемые случайными величинами X и Y, будем обозначать $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ соответственно. В частности, для рис. 4.3 значениями $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно считать приложенные напряжения, а значениями $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — соответствующие этим напряжениям продолжительности службы.

Задача, связанная с подбором математического выражения, описывающего связь между экспериментальными данными, называется *аппроксимацией*. Само математическое выражение называют *уравнением регрессии* (*регрессией*), а соответствующую кривую — *линией регрессии*. Чтобы подобрать наилучшую в некотором смысле регрессию, сперва необходимо установить критерий, с помощью которого определить, что такое «наилучшая» регрессия. Обратимся к рис. 4.4, где приведен пример набора экспериментальных данных и соответствующей ему линии регрессии.

На этом рисунке показаны отклонения d_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ линии регрессии от точек, соответствующих значениям, принимаемым случайными величинами X и Y. Одним из широко применяемых на практике критериев оптимальности регрессии является критерий *минимума суммы квадратов*. В соответствии с этим критерием наилучшее согласование линии регрессии с результатами измерения достигается при выполнении условия



$$d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_n^2 = \min. \qquad (4.21)$$

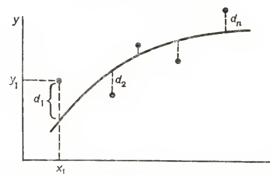


Рис. 4.4. Отклонение линии регрессии от экспериментальных данных на диаграмме рассеяния.

Его применение позволяет при определении линии регрессии использовать хорошо разработанный *метод наименьших квадратов*, обеспечивающий построение линии регрессии, характеризуемой минимальным средним квадратом ее отклонения от результатов эксперимента. Обратите внимание на то, что критерий минимума среднего квадрата предполагает равенство вклада в (4.21) отклонений, отличающихся лишь знаком, а также определяет, что большие по абсолютной величине отклонения входят в (4.21) с большим собственным весом.

После определения критерия оптимальности регрессии следует перейти к выбору типа уравнения регрессии. Тип уравнения в значительной мере зависит от вида экспериментальных данных, однако наиболее часто используют полином вида

$$y = a + bx + cx^2 + \ldots + kx^j.$$

Можно построить кривую, описываемую полиномом $(n - 1)$-й степени и проходящую через все n точек, однако такой способ обычно не используется, поскольку не приводит к сглаживанию кривой, хотя график этого полинома будет проходить через все заданные точки, и сумма квадратов отклонений будет равна 0. Поскольку результаты измерений, как правило, случайны, предпочтительно

аппроксимировать их средние значения. Поэтому обычно для аппроксимации используют полиномы первой и второй степени. В этом разделе мы ограничимся полиномом первой степени, чтобы сохранить простоту при описании существенных аспектов метода. Метод аппроксимации полиномом первой степени называют *линейной регрессией*.

Уравнение линейной регрессии имеет вид

$$y = a + bx, \tag{4.22}$$

в котором следует определить значения a и b, удовлетворяющие (4.21). Для этого запишем (4.21) в форме

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + bx_i)]^2 = \min.$$

Чтобы минимизировать это выражение, продифференцируем его по a и по b и приравняем производные нулю. В результате получим систему уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = an + b\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

решив которую, найдем искомые значения a и b:

$$b = \left(n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i\right) \Bigg/ \left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right), \tag{4.23}$$

$$a = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) \Bigg/ \left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right) =$$

$$= (1/n)\sum_{i=1}^{n} y_i - (b/n)\sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{4.24}$$

Хотя формулы (4.23) и (4.24) достаточно сложны, значения a и b нетрудно вычислить с помощью ЭВМ или программируемого микрокалькулятора.

Таблица 4.3

Зависимость пробивного напряжения конденсаторов от температуры окружающей среды

i	x_i, °C	y_i, В	i	x_i, °C	y_i, В
1	10	420	6	60	290
2	20	410	7	70	300
3	30	360	8	80	270
4	40	360	9	90	210
5	50	340	10	100	200

Для иллюстрации рассмотрим пример. Пусть производителю конденсаторов требуется найти зависимость пробивного напряжения конденсаторов от температуры окружающей среды. Результаты испытаний 10 конденсаторов при различных температурах приведены в табл. 4.3. По формулам (4.23) и (4.24) найдем, что $a = 451{,}33$, а $b = -2{,}406$. Таким образом, уравнение регрессии имеет вид $U_{\text{пр}} = 451{,}33 - 2{,}406T$, где $U_{\text{пр}}$ ($= y_i$) — пробивное напряжение конденсатора, а T ($= x_i$) — температура окружающей среды. Соответствующая диаграмма рассеяния и линейная регрессия показаны на рис. 4.5.

При аппроксимации результатов измерений полиномами более высоких степеней применим подобный способ. Понятно, что чем выше степень полинома, тем сложнее найти оптимальные значения его коэффициентов. Однако известны очень эффективные матричные формулы, позволяющие применить численные методы решения задачи аппроксимации.

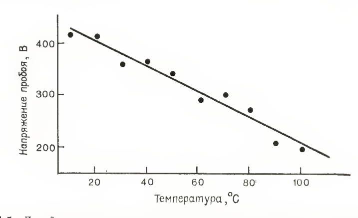


Рис. 4.5. Линейная регрессия для экспериментальных данных, показывающих зависимость пробивного напряжения конденсатора от температуры окружающей среды.

i	x_i, В	y_i, ч
1	105	1200
2	110	1000
3	115	920
4	120	750

Упражнение 4.6.1. Четыре электрические лампы испытывают с целью определения зависимости их продолжительности службы от напряжения питания. Результаты измерений приведены в таблице. Определите коэффициенты уравнения линейной регрессии и постройте на соответствующей диаграмме рассеяния линию регрессии.

Ответ: 4185, —28,6.

Упражнение 4.6.2. Пусть линия регрессии из упр. 4.6.1 проходит через все точки на диаграмме рассеяния, соответствующие полученным эксперимен-

тальным данным о напряжении питания. Определите среднюю продолжительность службы лампы, работающей при напряжении

а) 95 В, б) 125 В, в) 117 В.
Ответы: 838,8 ч, 610 ч, 1468 ч.

ЗАДАЧИ

4.2.1. Пусть с помощью микрокалькулятора получена следующая последовательность случайных чисел: 0,276, 0,123, 0,072, 0,324, 0,815, 0,312, 0,432, 0,283, 0,717. Определите для нее:

а) выборочное среднее,

б) выборочную дисперсию, если получаемые с помощью микрокалькулятора случайные числа равномерно распределены в интервале от 0,000 до 0,999,

в) объем выборки, если среднее квадратическое отклонение выборочного среднего не должно превысить 0,01.

4.2.2. При помощи опроса общественного мнения выясняют популярность двух кандидатов в президенты. Ответам в пользу первого и второго кандидатов приписывают соответственно значения +1 и −1.

а) Определите выборочное среднее, если 60 % опрошенных высказались в пользу первого кандидата.

б) Найдите зависимость выборочного среднего от объема выборки и доли опрошенных, высказавшихся в пользу первого кандидата.

в) Определите, каков должен быть объем выборки, чтобы при определении доли опрошенных, высказавшихся в пользу первого кандидата, среднее квадратическое отклонение не превысило 0,1 %?

4.2.3. Математическое ожидание и дисперсия оценок, полученных на экзамене студентами группы из 50 человек, соответственно равны 70 и 12 *. Это математическое ожидание нужно оценить по выборке оценок без возвращения. Определите:

а) среднее квадратическое отклонение выборочного среднего для выборки из 10 оценок,

б) объем выборки, если среднее квадратическое отклонение выборочного среднего должно равняться одному баллу (из 100 возможных),

в) объем выборки, если среднее квадратическое отклонение выборочного среднего должно равняться 1 % генерального среднего.

4.2.4. Средние коэффициенты усиления по току биполярных транзисторов двух аналогичных типов одинаковы и равны 120, однако средние квадратические отклонения коэффициентов усиления по току транзисторов этих типов различны и равны 10 и 5. По 20 транзисторов того и другого типа кладут в одну коробку.

а) Определите дисперсию выборочного среднего для выборки с возвращением из 5 транзисторов, взятых из этой коробки.

б) Определите дисперсию выборочного среднего для выборки без возвращения из 5 транзисторов, взятых из этой коробки.

в) Чему должен равняться объем выборки без возвращения, чтобы среднее квадратическое отклонение ее выборочного среднего равнялось 2?

4.2.5. Пусть коэффициенты усиления по току транзисторов из задачи 4.2.4 можно считать гауссовскими случайными величинами.

а) Какова вероятность того, что выборочное среднее выборки с возвращением объемом 10 транзисторов не будет отличаться от генерального среднего более чем на 2 %?

б) Выполните п. а, если выборка сформирована без возвращения.

4.3.1. а) Определите выборочную дисперсию для последовательности случайных чисел из задачи 4.2.1, используя несмещенную оценку.

б) Определите дисперсию оценки генеральной дисперсии.

---

* В США применяется 100-балльная система оценок. — *Прим. перев.*

4.3.2. Гауссовскую случайную функцию времени с нулевым математическим ожиданием подвергают дискретизации и получают некоторое количество независимых отсчетов. Сколько отсчетов нужно сделать, чтобы среднее квадратическое отклонение несмещенной оценки дисперсии этой функции равнялось 2 % среднего квадратического (стандартного) отклонения функции?

4.3.3. Оцените дисперсию случайного фазового угла с равномерным распределением на интервале 2π. Сколько независимых отсчетов нужно взять, чтобы среднее квадратическое отклонение несмещенной оценки дисперсии равнялось 5 % среднего квадратического отклонения случайного фазового угла?

4.4.1. а) Определите значение функции распределения Стьюдента при $v = 2$ и $v = 6$.

б) Выполните п. а при $v = 12$.

4.4.2. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение коэффициента усиления по току биполярных транзисторов из очень большой партии соответственно равны 120 и 10. Коэффициенты усиления можно считать независимыми гауссовскими случайными величинами.

а) Определите границы доверительного интервала с $q = 90$ %, если объем выборки равен 150.

б) Выполните п. а, если объем выборки равен 21.

4.4.3. Решите задачу 4.4.2 для одностороннего доверительного интервала и найдите значение коэффициента усиления, выше которого будет лежать 90 % эмпирических выборочных средних.

4.5.1. В документации на катушки индуктивности указывается, что их среднее активное сопротивление равно 100 Ом. Выборочное среднее и выборочное среднее квадратическое отклонение сопротивления для выборки из 9 катушек оказались соответственно равны 115 и 20 Ом. Можно ли считать, что генеральное среднее активное сопротивление катушек равно 100 Ом с доверительным уровнем

а) 95 %? б) 90 %?

4.5.2. Решите задачу 4.5.1, если объем выборки равен 50, а выборочное среднее 115 Ом, а среднее квадратическое отклонение сопротивления равно 10 Ом.

4.5.3. Указано, что средняя продолжительность службы лампы бегущей волны (ЛБВ) определенного типа превышает 4 года. В результате наблюдения за изменением характеристик 20 ЛБВ такого типа, установленных на борту спутника связи, выяснилось, что средняя продолжительность службы и ее среднее квадратическое отклонение для них соответственно равны 3,7 года и 1 год.

а) С каким уровнем надежности можно считать, что средняя продолжительность службы ЛБВ превышает 4 года?

б) Каков должен быть объем выборки, чтобы с $q = 90$ % утверждение о средней продолжительности службы ЛБВ 4 года можно было считать соответствующим действительности?

4.5.4. Указано, что среднее пробивное напряжение конденсаторов определенного типа превышает 100 В. При испытании 9 конденсаторов пробивные напряжения оказались равны 97, 104, 95, 98, 106, 92, 110, 103 и 93 В.

а) Определите эмпирическое выборочное среднее для указанных напряжений.

б) Определите эмпирическую выборочную дисперсию, использовав несмещенную оценку.

в) Можно ли с $q = 95$ % считать, что среднее пробивное напряжение конденсаторов превышает 100 В?

4.6.1. Рассмотрим случайную величину Y, являющуюся функцией другой случайной величины X. Значениям 1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 14, принимаемым случайной величиной X, соответствуют значения 1, 2, 4, 4, 5, 7, 8, 9, принимаемые случайной величиной Y.

а) Постройте диаграмму рассеяния для указанных значений X и Y.

б) Запишите уравнение линейной регрессии, наилучшим образом аппроксимирующее приведенные значения X и Y.

4.6.2. При проведении испытаний с целью определения зависимости пробивного напряжения конденсаторов от их емкости получено, что емкостям 0,0001, 0,001, 0,01, 0,1, 1,0 и 10 мкФ соответствуют пробивные напряжения 310, 290, 285, 270, 260 и 225 В.

а) Постройте для этих данных диаграмму рессеяния в полулогарифмическом масштабе.

б) Запишите уравнение линейной регрессии, наилучшим образом аппроксимирующее полученные данные, и постройте прямую регрессии в полулогарифмическом масштабе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mosteller F.*, *Feinberg S. E.*, *Rourke R. E. K.* Beginning Statistics with Data Analysis. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1983.

В этом учебнике основное внимание уделено разделу математической статистики, посвященному анализу экспериментальных данных. Изложение иллюстрируется множеством превосходных примеров, однако его математический уровень недостаточно строг для студентов инженерных специальностей.

2. *Spiegel M. R.* Theory and Problems of Probability and Statistics. Schaum's Outline Series in Mathematics. New York: McGraw-Hill, Inc., 1975.

В главах этого обзора, посвященных математической статистике, приведены краткие и четкие определения многих понятий, рассмотренных в гл. 4 этой книги. Кроме того, в обзор включено много хороших задач с ответами.

Глава 5

Случайные процессы

5.1. Введение

В гл. 2 было отмечено, что случайный процесс представляет собой совокупность функций времени и имеет вероятностное описание. Соответствующими вероятностными характеристиками могут быть безусловные и совместные плотности вероятностей всех случайных величин, являющихся точечными функциями процесса для фиксированных моментов времени. Ниже будет использоваться именно такой вид вероятностного описания.

Полная совокупность функций времени представляет собой *ансамбль* и будет обозначаться $\{x(t)\}$, где любая компонента $x(t)$ ансамбля есть *выборочная функция* случайного процесса. Обычно наблюдается только одна выборочная функция; остальные представляют собой другие возможные *реализации*, которые в принципе могут иметь место, но отсутствуют в данной ситуации. Произвольная случайная функция обозначается $X(t)$. Значения ее реализаций $x(t)$ в некоторый момент времени t_1 определяют случайную величину $X(t_1)$, или просто X_1.

Обобщение методов анализа случайных величин на случайные процессы оказывается достаточно простым в части используемых математических процедур; действительно, все основные понятия уже были рассмотрены. Однако более сложным этапом, имеющим концептуальное значение, является установление связи математических представлений случайных величин с физическими свойствами случайного процесса. Поэтому целью данной главы является анализ этой связи с помощью ряда иллюстративных примеров.

В инженерной практике возникает много различных классов случайных процессов. Так как методы описания этих процессов в значительной степени зависят от природы последних, необходимо осуществить классификацию случайных процессов таким способом, чтобы облегчался выбор соответствующего типа их представления. Кроме того, важно ввести терминологию, которая позволила бы определить класс рассматриваемого процесса четко и вместе с тем достаточно полно, чтобы избежать неопределенности в ответе на вопрос: какой именно процесс анализируется?

Поэтому одним из первых этапов в анализе случайных процессов является введение терминологии, которая может быть использована как рациональный метод описания характеристик любого процесса. Удобным способом выполнения этого является использование ряда определений, представляющих пары антонимов, и выбор одного из них из каждой пары с целью описания того или иного процесса. Такими парами, используемыми ниже, являются:

1. непрерывный — дискретный,
2. детерминированный — недетерминированный,
3. стационарный — нестационарный,
4. эргодический — неэргодический.

Упражнение 5.1.1. а) Предполагается, что некоторый случайный процесс может быть описан путем выбора одного определения из каждой пары, приведенной выше. Какое количество классов случайных процессов можно определить таким способом?

б) Можно также рассмотреть смешанные случайные процессы, образованные комбинацией двух или более случайных процессов типа описанного в упр. 5.1.1 а для формирования одного случайного процесса. Если имеет место комбинация двух случайных процессов такого типа, то чему равно общее число классов случайных процессов, которые могут быть представлены с помощью введенных выше определений?

Ответы: 16, 256.

Упражнение 5.1.2. а) Функция времени формируется посредством однократного подбрасывания двух монет каждую секунду. Исходу, соответствующему появлению решетки, присваивается значение +1, герба — значение —1. Функция времени в пределах каждого односекундного интервала задается как постоянная величина, равная сумме условных значений двух исходов. Изобразите графически типовую реализацию случайного процесса, определенного таким образом. Исходите из того, что реализация имеет длительность 8 с и может принимать все возможные значения.

б) Сколько возможных реализаций длительностью 8 с имеет данный случайный процесс?

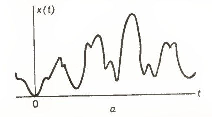
Ответ: 6561.

5.2. Непрерывные и дискретные случайные процессы

Эти термины обычно применяются к возможным значениям случайных величин. *Непрерывный случайный процесс* — это процесс, для которого случайные величины $X(t_1)$, $X(t_2)$ и т. д. могут принимать любое значение в пределах заданной области возможных значений. Эта область может быть конечной, бесконечной и полубесконечной. Примерами непрерывных случайных процессов являются тепловые шумы в проводниках, дробовые шумы в электровакуумных приборах и транзисторах, скорость ветра. Типовая реализация такого случайного процесса и соответствующая плотность вероятностей изображены на рис. 5.1. В данном примере область возможных значений процесса является полубесконечной.

Более точное определение непрерывного случайного процесса исходит из того, что его функция распределения непрерывна. Это означает также, что его плотность вероятностей не содержит в себе дельта-функций.

Дискретный случайный процесс — это процесс, для которого случайные величины могут принимать только определенные зна-



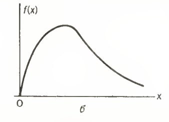
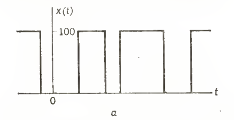


Рис. 5.1. Непрерывный случайный процесс: *a* — типовая реализация; *б* — плотность вероятностей.

чения (возможно их бесконечное число) и никакие другие. Например, напряжение, которое случайным образом принимает значения 0 или 100 В в зависимости от того, открыт или заперт коммутатор (реле), является реализацией дискретного случайного процесса. Это иллюстрируется рис. 5.2. Заметим, что плотность вероятностей содержит только дельта-функции.



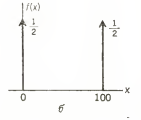
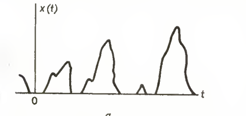


Рис. 5.2. Дискретный случайный процесс: *a* — типовая реализация; *б* — плотность вероятностей.

Могут также существовать *смешанные* случайные процессы, которые имеют как непрерывную, так и дискретную компоненты. Например, ток, протекающий через идеальный выпрямитель, может иметь нулевое значение в течение 50 % времени, как это показано на рис. 5.3. Соответствующая плотность вероятностей имеет как участок непрерывного изменения, так и скачок в виде дельта-функции.

Ряд других примеров случайных процессов будет служить иллюстрацией понятий непрерывного и дискретного случайных процессов. Тепловой шум в электрической цепи — типовой пример

непрерывного случайного процесса, так как его амплитуда может принимать любые положительные или отрицательные значения. Плотность вероятностей теплового шума является непрерывной функцией в области (—∞, ∞). Ошибка квантования, связанная с аналого-цифровым преобразованием, рассмотренным в разд. 2.7, представляет собой другой пример непрерывного случайного процесса, так как эта ошибка может принимать любое значение в пределах области, определяемой приращением между уровнями квантования. Плотность вероятностей ошибки квантования обычно полагается равномерной в области возможных ошибок. Этот слу-



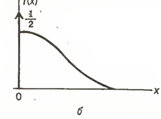


Рис. 5.3. Смешанный случайный процесс: *а* — типовая реализация; *б* — плотность вероятностей.

чай представляет незначительный отход от строгого в математическом смысле определения, так как плотность вероятностей не является непрерывной функцией в граничных точках. Тем не менее, поскольку плотность вероятностей не содержит дельта-функций, мы будем рассматривать соответствующий случайный процесс в рамках нашей классификации как непрерывный.

С другой стороны, если в качестве случайного процесса рассматривается возрастающее число телефонных вызовов системы телефонной связи, то результирующий процесс окажется дискретным, так как количество вызовов может быть только целым числом. Плотность вероятностей этого процесса содержит множество дельта-функций. Другим примером дискретного случайного процесса является результат квантования выборочной функции непрерывного случайного процесса и формирование при этом другого случайного процесса, принимающего только конечное число возможных значений. Например, 8-разрядный аналого-цифровой преобразователь, на входе которого имеет место сигнал с непрерывной плотностью вероятностей, преобразует его в сигнал с дискретной плотностью вероятностей, содержащей 256 дельта-функций.

Наконец, рассмотрим некоторые смешанные случайные процессы, которые имеют и непрерывную, и дискретную компоненты. Один из примеров — выпрямленная функция времени, рассмотренная выше. Другим примером может служить процесс на вы-

ходе системы, содержащей ограничитель; при этом если значение случайного процесса на выходе меньше предельного значения (порога), то имеет место полное повторение входного случайного процесса. Однако значения на выходе не могут быть больше предельного значения независимо от уровня на входе. Таким образом, имеет место преобразование непрерывного случайного процесса в смешанный случайный процесс, плотность вероятностей которого имеет непрерывную компоненту и две дельта-функции.

Во всех упомянутых случаях реализации непрерывны во времени, т. е. случайная величина может быть определена для любого момента времени. Ситуации, соответствующие существованию случайных величин только для определенных моментов времени (точечные процессы или временные последовательности), в данной главе не рассматриваются.

Упражнение 5.2.1. Гауссовский шум с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной 0,1 В^2, аддитивно смешивается со случайным двоичным сигналом, принимающим значения ± 1 В.

а) Определите, какого типа суммарный случайный процесс: непрерывный, дискретный или смешанный.

Ответьте на тот же вопрос в случае, когда суммарный случайный процесс проходит

б) через ограничитель с порогами ограничения $\pm 1{,}1$ В.

в) через идеальный предельный ограничитель с амплитудной характеристикой вида $U_{\text{вых}} = \text{sgn}\,(U_{\text{вх}})$.

Ответы: смешанный; непрерывный; дискретный.

Упражнение 5.2.2. Случайная функция времени имеет математическое ожидание, равное 10, и амплитуду с рэлеевским распределением. Эта функция умножается на синусоиду, имеющую максимальное значение, равное 10, и случайную фазу, равномерно распределенную в интервале $[0, 2\pi]$.

а) Определите, какой тип случайного процесса представляет собой это произведение: непрерывный, дискретный или смешанный.

б) Ответьте на тот же вопрос в случае прохождения произведения этих случайных процессов через идеальный однополупериодный выпрямитель.

в) Какой тип случайного процесса представляет собой результат прохождения синусоидального колебания через идеальный однополупериодный выпрямитель с последующим его умножением на функцию времени с рэлеевским распределением?

Ответы: непрерывный; смешанный; смешанный.

5.3. Детерминированные и недетерминированные случайные процессы

В значительной части проводимого до сих пор анализа полагалось, что каждая реализация является случайной функцией времени и ее будущие значения не могут быть точно предсказаны на основе зарегистрированных ранее значений. Говорят, что такой случайный процесс является *недетерминированным*. Почти все существующие в природе случайные процессы относятся к недетерминированным, так как физический механизм, лежащий в основе их возникновения, либо ненаблюдаем, либо очень сложен.

Все процессы, представленные в разд. 5.2, относятся к недетерминированным.

Однако имеется возможность определить случайные процессы, для которых будущие значения какой-либо реализации можно точно предсказать, зная прошлые значения. Такие случайные процессы называют *детерминированными* *). В качестве примера рассмотрим случайный процесс

$$X(t) = A \cos(\omega t + \theta), \tag{5.1}$$

где A и ω — постоянные, θ — случайная величина с определенным вероятностным распределением, т. е. для какой-то одной реализации величина θ имеет одно и то же значение для всех t, но для других членов ансамбля — другие значения. В этом случае имеют место случайные изменения только по ансамблю реализаций, но не по времени. Как и ранее, можно определить случайные величины $X(t_1)$, $X(t_2)$ и т. д., а также соответствующие им плотности вероятностей.

В качестве второго примера детерминированного процесса рассмотрим периодический случайный процесс

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos(2\pi n f_0 t) + B_n \sin(2\pi n f_0 t)], \tag{5.2}$$

где A_n и B_n — независимые случайные величины, которые являются фиксированными для какой-либо одной реализации, но отличаются друг от друга от реализации к реализации. При известной временной предыстории реализации можно определить эти коэффициенты и точно предсказать будущие значения функции $X(t)$.

Не является необходимым требование, чтобы детерминированные процессы были периодическими, хотя, вероятно, это наиболее типичная ситуация, возникающая в практических приложениях. Например, детерминированный случайный процесс может иметь реализацию вида

$$X(t) = A \exp(-\beta t), \quad t \geqslant 0, \tag{5.3}$$

где A и β — случайные величины, фиксированные для какой-либо одной реализации, но изменяющиеся от реализации к реализации.

Хотя понятие детерминированного случайного процесса может показаться несколько искусственным, часто оказывается удобным получить вероятностную модель для сигналов, которые известны, за исключением одного или двух параметров. В частности, процесс, описываемый соотношением (5.1), целесообразно использовать для представления радиосигнала с известными амплитудой

*) В отечественной литературе в соответствии с ГОСТ 21878-76 «Случайные процессы и динамические системы» такие процессы называют *квазидетерминированными*. — *Прим. ред.*

и частотой, но неизвестной фазой. Фаза радиосигнала может быть неизвестна, например, вследствие того, что не определено точное расстояние (до долей длины волны) между передатчиком и приемником.

Упражнение 5.3.1. Реализация $x(t)$ случайного процесса $X(t)$, определенного в соответствии с (5.1), наблюдается в три момента времени, для которых ее значения оказались равными: $X(0) = 0$; $X(1) = 10$; $X(2) = 0$. Между моментами $t = 0$ и $t = 2$ отсутствуют нулевые значения реализации.

а) Определите значения параметров A, ω и θ.

б) Определите значения $X(2{,}5)$.

Ответы: 1,57; 10; —7,07; —1,57.

Упражнение 5.3.2. Случайный процесс задан в форме

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n f(t - nt_1),$$

где A_n — независимые случайные величины, равномерно распределенные в интервале [0, 10];

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant t_1/2, \\ 0 & \text{для других } t. \end{cases}$$

а) Детерминированным или недетерминированным является данный процесс? Почему?

б) Непрерывным, дискретным или смешанным является данный процесс? Почему?

Ответы: недетерминированным; смешанным.

5.4. Стационарные и нестационарные случайные процессы

Выше отмечалось, что можно определить плотность вероятностей случайных величин вида $X(t_1)$, но до сих пор ничего не было сказано о зависимости этой плотности вероятностей от времени t_1. Если все безусловные одномерные и совместные плотности вероятностей случайного процесса не зависят от выбора начала отсчета времени, то такой процесс называется *стационарным*. В этом случае математическое ожидание и моменты, рассмотренные выше, являются постоянными, не зависящими от абсолютного значения времени.

Если какая-либо из плотностей вероятностей изменяется при сдвиге начала отсчета времени, то случайный процесс является *нестационарным*. В этом случае хотя бы одна из статистических характеристик (математическое ожидание, моменты) будет зависеть от времени. Так как анализ систем при действии на их входе нестационарных случайных сигналов оказывается гораздо более трудоемким, чем в случае стационарных сигналов, в последующем изложении ограничимся анализом стационарных случайных процессов, если только не будет оговорено противное.

В строгом смысле физически не существует стационарных случайных процессов, так как любой процесс должен начаться

в определенный момент времени в прошлом и, вероятно, завершиться в некоторый момент в будущем. Однако есть много физических ситуаций, когда статистические характеристики процесса существенно не изменяются на интервале времени наблюдения. В этих случаях предположение о стационарности приводит к удобной математической модели, которая является достаточно точной аппроксимацией реальной ситуации.

Обоснование справедливости или неправомерности допущения о стационарности для любой заданной ситуации может оказаться непростой задачей. Для недетерминированных случайных процессов оно зависит от механизма, их порождающего, и времени наблюдения процесса. Чисто интуитивно напрашивается мысль допустить, что процесс стационарный, если нет очевидных изменений в параметрах источника процесса или если здравый смысл не диктует противоположное. Например, тепловой шум, порождаемый случайными движениями электронов в резисторе, в нормальных условиях справедливо может считаться стационарным. Однако если этот резистор подвергать нагреванию путем прерывистого пропускания через него электрического тока, то допущение о стационарности несправедливо. В качестве другого примера представляется приемлемым допущение о том, что ветер (и его случайная скорость) в течение одного часа порождается стационарным источником, тогда как здравый смысл подсказывает, что для интервала времени, равного одной неделе, это предположение некорректно.

Детерминированные случайные процессы стационарны только при выполнении определенных, весьма специфических условий. Обычно возникает желание предположить, что эти условия существуют, однако необходимо осознавать, что это вынужденный выбор и не обязательно естественный. Например, для случайного процесса, определенного соотношением (5.1), легко показать (путем вычисления математического ожидания), что процесс может быть (и в действительности является) стационарным, если величина θ равномерно распределена на интервале $[0, 2\pi]$, и наверняка не является таковым, если θ равномерно распределена на интервале $[0, \pi]$. Можно показать, что случайный процесс, определенный соотношением (5.2), стационарен, если A_n и B_n — независимые гауссовские случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и для идентичных индексов n — с одинаковыми дисперсиями. Однако в большинстве других ситуаций этот процесс будет нестационарным. Случайный процесс, определяемый соотношением (5.3), всегда нестационарен.

Требование, чтобы все безусловные и совместные плотности вероятностей были независимы от выбора начала отсчета времени, часто является более строгим, чем это требуется для анализа систем. Процессы, удовлетворяющие этому требованию, назы-

ваются стационарными в узком смысле. Менее жесткое требование, которое часто оказывается достаточным, заключается в том, чтобы математическое ожидание любой случайной величины $X(t_1)$ не зависело от выбора t_1, а корреляционная функция двух случайных величин $\overline{X(t_1)\,X(t_2)}$ зависела только от разности $(t_2 - t_1)$. Процессы, удовлетворяющие этим двум условиям, называются *стационарными в широком смысле*. Стационарность в широком смысле является достаточной гарантией того, чтобы математическое ожидание, среднеквадратическое значение, дисперсия и коэффициент корреляции любой пары случайных величин были постоянными, не зависящими от выбора начала отсчета времени.

При последующем рассмотрении реакции систем на случайные входные воздействия будет показано, что анализ этих процессов существенно упрощается, если справедливо допущение о стационарности воздействий в узком или широком смысле. Так как результаты идентичны для любого типа стационарности, не представляется необходимым делать различие между ними в дальнейшем изложении.

Упражнение 5.4.1. а) Для случайного процесса, определенного в упр. 5.3.2, найти математическое ожидание случайной величины $X(t_1/4)$.

б) Определите математическое ожидание случайной величины $X(3t_1/4)$.

в) Является ли процесс стационарным? Почему?

Ответы: нет; 5; 0.

Упражнение 5.4.2. Случайный процесс имеет вид

$$X(t) = A\cos(\omega t + \theta),$$

где A и ω — постоянные, θ — случайная величина.

а) Докажите, что этот процесс стационарен в широком смысле, если θ равномерно распределено в интервале $[0, 2\pi]$.

б) Докажите, что этот процесс не может быть стационарным, если θ не является равномерно распределенной на этом интервале.

5.5. Эргодические и неэргодические случайные процессы

Некоторые стационарные случайные процессы обладают свойством, заключающимся в том, что почти каждый член [1]) ансамбля «ведет» себя в статистическом смысле так же, как и весь ансамбль. Таким образом, можно проанализировать статистическую динамику путем исследования только одной типовой реализации. Такие случайные процессы называются *эргодическими*.

Для эргодических случайных процессов математические ожидания и моменты могут быть определены как усреднением по

[1]) Слова «почти каждый член» означают, что ряд реализаций, полная вероятность появления которых равна нулю, может не проявлять поведения, характерного для остальной части ансамбля. Но равенство нулю вероятности появления реализации не означает, что такая реализация невозможна.

времени, так и усреднением по ансамблю реализаций. В частности, n-й момент определяется как

$$\overline{X^n} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\, dx = \lim_{T\to\infty} (1/2T) \int_{-T}^{T} X^n(t)\, dt. \quad (5.4)$$

Однако необходимо подчеркнуть, что условие эргодичности выполняется только для стационарного процесса. Таким образом, эргодические случайные процессы являются также стационарными.

Случайный процесс, не удовлетворяющий свойству (5.4), является *неэргодическим*. Все нестационарные случайные процессы неэргодичны, однако неэргодическими могут быть и стационарные случайные процессы. Например, рассмотрим случайный процесс вида

$$X(t) = Y \cos(\omega t + \theta), \quad (5.5)$$

где ω — постоянная, Y — случайная величина (относительно ансамбля), θ — случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[0, 2\pi]$, причем θ и Y статистически независимы. Можно показать, что этот случайный процесс стационарен, но не эргодичен, так как Y — некоторая постоянная для определенной реализации, но имеет другие значения для остальных реализаций.

В общем случае трудно, если только вообще возможно, доказать, что эргодичность — обоснованное допущение для какого-либо физического процесса, так как может наблюдаться только одна реализация этого процесса. Тем не менее обычно имеет смысл предположить эргодичность процесса, если только отсутствуют веские доводы физического характера, препятствующие этому.

Упражиеиие 5.5.1. Случайный процесс имеет вид $X(t) = A$, где A — гауссовская случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной 4.

а) Является ли данный процесс стационарным в широком смысле?
б) Является ли данный процесс эргодическим? Почему?
Ответы: нет; да.

Упражиеиие 5.5.2. Случайный процесс имеет вид

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Af(t - nT - t_0),$$

где A и T — постоянные, t_0 — случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[0, T]$; функция $f(t)$ определяется как

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant T/2, \\ 0 & \text{для других } t. \end{cases}$$

а) Определите $\overline{X}$ и $\overline{X^2}$.

б) Определите $\langle x \rangle$ и $\langle x^2 \rangle$, где угловые скобки означают операцию временного усреднения.
в) Может ли данный процесс быть стационарным?
г) Может ли данный процесс быть эргодическим?
Ответы: $A/2$, $A^2/2$, да, да.

5.6. Измерение параметров случайных процессов

Статистическими параметрами случайного процесса $X(t)$ является ряд статистических параметров (таких, как математическое ожидание, средний квадрат, дисперсия), связанных со случайными величинами $X(t)$, рассматриваемыми в различные моменты времени t. Для стационарного случайного процесса эти параметры одинаковы для всех таких случайных величин и, следовательно, целесообразно рассматривать только одну группу параметров.

Значительный практический интерес представляет задача оценки параметров случайного процесса по результатам наблюдения одной реализации (так как все, что имеется в наличии — это одна реализация конечной длительности). Так как имеется только одна реализация, невозможно осуществить усреднение по ансамблю с целью получения оценок параметров, поэтому единственной альтернативой является осуществление усреднения по времени. Для эргодического случайного процесса это обоснованный подход, так как временное усреднение (на интервале бесконечной длительности) эквивалентно усреднению по ансамблю, как это видно из (5.4). Разумеется, в большинстве практических ситуаций мы не можем доказать, что случайный процесс является эргодическим; обычно необходимо предположить, что он эргодичен, если только нет явных физических причин, исключающих справедливость такого допущения. Кроме того, не представляется возможным реализовать временное усреднение в пределах интервала бесконечной длительности, а усреднение на интервале конечной длительности приведет к приближенным результатам. Цель нижеследующего анализа — получение ответов на два вопроса: насколько точным является это приближение и от каких аспектов процедуры измерения зависит качество приближения?

Сначала рассмотрим задачу оценки математического ожидания $\widehat{X}$ эргодического случайного процесса $\{x(t)\}$ путем усреднения по времени на конечном интервале. Тогда для произвольного члена ансамбля реализаций будем полагать

$$\widehat{\overline{X}} = (1/T) \int_0^T X(t)\, dt. \tag{5.6}$$

Необходимо отметить, что, хотя $\widehat{X}$ — некоторое число в каком-то эксперименте, эта величина также является случайной, так как

мы получили бы другое число, если бы использовался другой временной интервал или наблюдалась другая реализация. Таким образом, $\hat{\bar{X}}$ не будет тождественно равно истинному математическому ожиданию, но, чтобы измерения были практически полезными, величина $\hat{\bar{X}}$ должна быть близкой к $\bar{X}$. Вопрос о том, насколько они близки, рассмотрен ниже.

Так как $\hat{\bar{X}}$ — случайная величина, она имеет математическое ожидание и дисперсию. Чтобы $\hat{\bar{X}}$ было хорошей (точной) оценкой $\bar{X}$, математическое ожидание величины $\hat{\bar{X}}$ должно быть равно $\bar{X}$, а ее дисперсия должна быть малой. В соответствии с (5.6) математическое ожидание величины $\hat{\bar{X}}$ равно

$$E[\hat{\bar{X}}] = E\left[(1/T)\int\limits_0^T X(t)\,dt\right] = (1/T)\int\limits_0^T E[X(t)]\,dt =$$
$$= (1/T)\int\limits_0^T \bar{X}\,dt = (1/T)\left[\bar{X}t\Big|_0^T\right] = \bar{X}. \qquad (5.7)$$

В данном случае допустима перестановка операций усреднения и интегрирования, что является общепринятой процедурой. Условия, при которых справедлива эта процедура, более подробно будут рассмотрены в гл. 8. Из (5.7) следует, что $\hat{\bar{X}}$ имеет математическое ожидание, равное истинному (т. е. имеем несмещенную оценку. — *Ред.*). Оценка дисперсии случайной величины $\hat{\bar{X}}$ оказывается значительно более трудоемкой и требует знания автокорреляционных функций, что является предметом рассмотрения следующей главы. Однако дисперсия таких оценок анализируется для случая с дискретным временем. Здесь же достаточно заметить, что дисперсия пропорциональна параметру $(1/T)$. Таким образом, более точная оценка математического ожидания получается усреднением реализации на временном интервале большой длительности. При $T \to \infty$ дисперсия стремится к нулю, а оценка становится равной истинному математическому ожиданию с вероятностью единица, как и должно быть для эргодического случайного процесса.

С практической точки зрения операция интегрирования в выражении (5.6) в редких случаях может быть выполнена аналитически, поскольку $X(t)$ не может быть выражено в явном виде. Альтернативой является численное интегрирование выборок случайного процесса $X(t)$, наблюдаемых через равноотстоящие промежутки времени. Таким образом, если $X_1 = X(\Delta t)$, $X_2 =$

$= X(2\Delta t)$, ..., $X_N = X(N\Delta t)$, то оценка случайной величины $\overline{X}$ может быть представлена как

$$\widehat{\overline{X}} = (1/N)\sum_{i=1}^{N} X_i. \tag{5.8}$$

Это выражение — дискретный аналог соотношения (5.6).

Оценка $\widehat{\overline{X}}$ по-прежнему является случайной величиной и имеет математическое ожидание

$$E[\widehat{\overline{X}}] = E\left[(1/N)\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = (1/N)\sum_{i=1}^{N} E[X_i] = (1/N)\sum_{i=1}^{N} \overline{X} = \overline{X}. \tag{5.9}$$

Следовательно, оценка и в этом случае имеет математическое ожидание, равное его истинному значению.

Для оценки дисперсии случайной величины $\widehat{\overline{X}}$ полагают, что наблюдаемые выборки следуют во времени на достаточно длительных интервалах и поэтому статистически независимы. На данном этапе это допущение принимается для удобства; более общий вывод может быть сделан после анализа материала, приведенного в гл. 6. Средний квадрат $\widehat{\overline{X}}$ может быть представлен в виде

$$E[(\widehat{\overline{X}})^2] = E\left[(1/N^2)\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i X_j\right] = (1/N^2)\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} E[X_i X_j], \tag{5.10}$$

где двойное суммирование обусловлено произведением двух сумм. Так как выборки полагались статистически независимыми, имеем

$$E[X_i X_j] = \begin{cases} \overline{X^2}, & i = j, \\ (\overline{X})^2, & i \neq j. \end{cases}$$

Таким образом, получим

$$E[(\widehat{\overline{X}})^2] = (1/N^2)[N\overline{X^2} + (N^2 - N)(\overline{X})^2]. \tag{5.11}$$

Этот результат является следствием того, что двойная сумма в (5.10) содержит в совокупности N^2 членов, но только N из них соответствуют случаю $i = j$. Уравнение (5.11) может быть записано в виде

$$E[(\widehat{\overline{X}})^2] = (1/N)\overline{X^2} + [1 - (1/N)](\overline{X})^2 = (1/N)\sigma_X^2 + (\overline{X})^2. \tag{5.12}$$

Тогда дисперсия величины $\widehat{\overline{X}}$ может быть представлена как

$$D(\widehat{\overline{X}}) = E[(\widehat{\overline{X}})^2] - \{E[\widehat{\overline{X}}]\}^2 = (1/N)\sigma_X^2 + (\overline{X})^2 - (\overline{X})^2 = (1/N)\sigma_X^2. \quad (5.13)$$

Этот результат свидетельствует о том, что дисперсия оценки математического ожидания в N раз меньше дисперсии случайного процесса. Таким образом, точность оценки может быть повышена усреднением большего числа выборок.

В качестве иллюстрации полученного результата предположим, что необходимо оценить дисперсию гауссовского случайного процесса с нулевым математическим ожиданием путем пропускания его через устройство с квадратичной характеристикой и оценивания математического ожидания выходного процесса. Предположим, что необходимо также определить требуемое число усредняемых выборок, обеспечивающее среднее квадратическое отклонение оценки от истинного математического ожидания менее 10 %.

Пусть $Y(t)$ — наблюдаемый случайный гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_Y^2. Результат возведения этого процесса в квадрат обозначим через $X(t)$. Таким образом, имеем $X(t) = Y^2(t)$. Из (2.27) следует

$$\overline{X} = E[Y^2] = \sigma_Y^2, \quad \overline{X^2} = E[Y^4] = 3\sigma_Y^4.$$

Следовательно,

$$\sigma_X^2 = \overline{X^2} - (\overline{X})^2 = 3\sigma_Y^4 - \sigma_Y^4 = 2\sigma_Y^4.$$

Отсюда ясно, что оценка $\overline{X}$ является также оценкой параметра σ_Y^2. Кроме того, дисперсия оценки случайной величины $\overline{X}$ должна быть равной $0{,}01\,(\overline{X})^2 = 0{,}01\sigma_Y^4$ с тем, чтобы удовлетворить требованию получения ошибки оценки менее 10 %. Из (5.13) получаем

$$D(\widehat{\overline{X}}) = (1/N)\sigma_X^2 = (1/N)\,2\sigma_Y^4 = 0{,}01\sigma_Y^4.$$

Таким образом, для достижения необходимой точности требуется иметь $N = 200$ статистически независимых выборок.

Приведенный анализ не только иллюстрирует задачи, возникающие при оценке математического ожидания случайного процесса, но также показывает, как может быть оценена дисперсия процесса, имеющего нулевое математическое ожидание. Эти же процедуры могут быть, очевидно, обобщены на оценку дисперсии случайного процесса с ненулевым математическим ожиданием.

Когда математическое ожидание случайного процесса, дисперсия которого должна быть оценена, не известно, процедура оценки

дисперсии становится несколько более трудоемкой. На первый взгляд логично определить среднее значение величин X_i^2 и затем вычесть квадрат оцененного (в соответствии с (5.8)) математического ожидания. Однако получающаяся при этом оценка дисперсии является смещенной, т. е. математическое ожидание оценки дисперсии не равно истинной дисперсии. Этот результат обусловлен тем, что истинное математическое ожидание не известно. Однако имеется возможность исправить этот недостаток, определяя оценку дисперсии в виде

$$\widehat{\sigma}_X^2 = (1/(N-1)) \sum_{i=1}^{N} X_i^2 + (N/(N-1)) (\widehat{\overline{X}})^2. \qquad (5.14)$$

В качестве упражнения читателю предоставляется возможность доказать, что математическое ожидание этой оценки равно истинной дисперсии. Сравните этот результат с аналогичным результатом, иллюстрируемым соотношением (4.8).

Упражнение 5.6.1. Десять независимых измерений напряжения, представляющих собой выборки гауссовского случайного процесса, имеют следующие значения: 207, 202, 184, 204, 206, 198, 197, 213, 191, 201.

а) Оцените математическое ожидание этого процесса.

б) Определите дисперсию этой оценки математического ожидания.

в) Оцените дисперсию этого процесса.

Ответ: 4,9, 69,34, 200,3.

Упражнение 5.6.2. Покажите, что оценка дисперсии, определенная в соответствии с (5.14), является несмещенной, т.е. $E[\hat{\sigma}_X^2] = \sigma_X^2$.

ЗАДАЧИ

5.1.1. Реализация случайного процесса получается в результате пятикратного бросания игральной кости. На интервале $[i-1, i]$ значение реализации равно исходу i-го бросания игральной кости.

а) Изобразить получившуюся реализацию, если исходами пяти бросаний являются: 5, 2, 6, 4, 1.

б) Сколько различных реализаций содержит ансамбль данного случайного процесса?

в) Какова вероятность того, что будет наблюдаться реализация, определенная в п. а?

г) Какова вероятность того, что наблюдаемая реализация будет состоять только из цифры 3?

5.1.2. Датчик случайных чисел электронной вычислительной машины формирует трехзначные числа, равномерно распределенные в интервале [0,000; 0,999], с производительностью, равной одному случайному числу в секунду, начиная с момента $t = 0$. Реализация случайного процесса формируется путем суммирования десяти последних случайных чисел и присвоения этой сумме значения реализации на односекундном интервале. Реализации обозначаются как $X(t)$ для $t \geqslant 0$. Определить математическое ожидание случайной величины: а) $X(4{,}5)$; б) $X(9{,}5)$; в) $X(20{,}5)$.

5.2.1. Определить, к какому типу (непрерывный, дискретный, смешанный) относятся приведенные ниже случайные процессы.

а) Случайный процесс, для которого случайной величиной является число проезжающих автомобилей в минуту при определенной плотности движения.

б) Напряжение теплового шума, генерируемого резистором.

в) Случайный процесс, определенный в задаче 5.1.2.

г) Случайный процесс, формируемый в результате прохождения гауссовского случайного процесса через идеальный однополупериодный выпрямитель.

д) Случайный процесс, формируемый в результате прохождения гауссовского случайного процесса через идеальный двухполупериодный выпрямитель.

е) Случайный процесс вида

$$X(t) = A\cos(Bt + \theta),$$

где A — постоянная, B — случайная величина, экспоненциально распределенная в интервале $[0, \infty]$; θ — случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[0, 2\pi]$.

5.2.2. Гауссовский случайный процесс, имеющий математическое ожидание, равное 2, и дисперсию, равную 4, проходит через идеальный однополупериодный выпрямитель.

а) Пусть $X_p(t)$ — случайный процесс на выходе однополупериодного выпрямителя, если на его выход проходят положительные значения входного процесса. Определить плотность вероятностей процесса $X_p(t)$.

б) Пусть $X_n(t)$ — случайный процесс на выходе однополупериодного выпрямителя, если на его выход проходят отрицательные значения входного процесса. Определить плотность вероятностей процесса $X_n(t)$.

в) Определить плотность вероятностей процесса $X_p(t)\,X_n(t)$.

5.3.1. Детерминированным или недетерминированным является каждый из случайных процессов, определенных в задаче 5.2.1?

5.3.2. Детерминированный случайный процесс описывается выражением

$$X(t) = \begin{cases} At + B, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

где A — гауссовская случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной 9; B — случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[0, 6]$. Величины A и B статистически независимы.

а) Определить математическое ожидание этого процесса.

б) Определить дисперсию этого процесса.

в) При условии, что реализация случайного процесса $X(t)$ принимает значение, равное 10, при $t = 2$ и значение, равное 20, при $t = 4$, определить значение реализации при $t = 8$.

5.4.1. Можно ли каждый из случайных процессов, определенных в задаче 5.2.1, с достаточным основанием считать стационарным или нестационарным? Если вы считаете какой-либо из этих процессов нестационарным, дайте обоснование.

5.4.2. а) Стационарным или нестационарным является процесс, определенный в задаче 5.3.2? Почему?

б) Случайный процесс определен выражением

$$X(t) = A + B\cos(\omega t + \theta),$$

где A — случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[-5, 5]$; B — гауссовская случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной 25; ω — постоянная, θ — случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[-\pi/2, 3\pi/2]$. Величины A, B и θ статистически независимы. Вычислить математическое ожидание и дисперсию этого процесса. Является ли этот процесс стационарным в широком смысле?

5.5.1. Эргодическим или неэргодическим является каждый из случайных процессов, определенных в задаче 5.2.1? Если вы считаете, что данный процесс неэргодичен, поясните это.

5.5.2. Указать, эргодическим или неэргодическим является каждый из процессов, определенных в задаче 5.4.2, и дать обоснование.

5.6.1. Выборки $x(i)$ реализации $x(t)$ стационарного случайного процесса $X(t)$ наблюдаются в моменты времени, разделенные интервалами длительностью 0,01 с. Значения выборок приведены в таблице.

i	$x(i)$	i	$x(i)$	i	$x(i)$
0	0,19	7	—1,24	14	1,45
1	0,29	8	—1,88	15	—0,82
2	1,44	9	—0,31	16	—0,25
3	0,83	10	1,18	17	0,23
4	—0,01	11	1,70	18	—0,91
5	—1,23	12	0,57	19	—0,19
6	—1,47	13	0,95	20	0,24

а) Оценить математическое ожидание этого процесса.

б) При условии, что истинная дисперсия равна 1,0, определить дисперсию вашей оценки математического ожидания.

5.6.2. Оценить дисперсию случайного процесса, определенного в задаче 5.6.1.

ЛИТЕРАТУРА

См. литературу к гл. 1, особенно [3, 6, 8].

Глава 6

Корреляционные функции

6.1. Введение

Понятие корреляции между значениями двух случайных величин было определено в разд. 3.4. Теперь, поскольку уже было введено определение случайного процесса, можно сопоставить эти два понятия для статистического, а не просто вероятностного описания случайных процессов. Хотя описание в рамках теории вероятностей оказывается наиболее полным, так как учитывает все сведения о случайном процессе, существует множество технических проблем, где подобная полнота недостижима и, кроме того, в ней нет необходимости. Например, если наиболее важной характеристикой данного случайного процесса является его средняя мощность или распределение этой мощности по частотному спектру, то в создании исчерпывающей вероятностной модели такого процесса нет необходимости. Если же распределение вероятностей случайных величин заранее неизвестно, использовать вероятностную модель вообще не представляется возможным. В любом из этих двух случаев частичное статистическое описание, основанное на конкретных средних значениях, может оказаться достаточно приемлемой заменой вероятностного подхода.

В разд. 3.4 отмечалось, что корреляция между двумя случайными величинами определяется математическим ожиданием их произведения. Если в качестве двух случайных величин выступают выборки случайного процесса в два различных момента времени, то такое математическое ожидание зависит от того, насколько быстро эти функции изменяются во времени. Можно полагать, что случайные величины будут сильно коррелированы, когда моменты времени очень близки друг к другу, поскольку случайная величина, зависящая от времени, за короткое время не может существенно измениться. В то же время корреляция между двумя выборками, взятыми в далеко отстоящие друг от друга моменты времени, скорее всего весьма мала, так как за такое время случайные величины могут претерпеть практически любые изменения. Поскольку корреляция безусловно зависит от того, насколько быстро меняется во времени случайная величина, можно предположить, что она определяется также и тем, каким образом энергия случайного процесса распределяется по частотному спек-

тру. Данное положение подтверждается тем фактом, что у процесса, быстро изменяющегося во времени, высокочастотные составляющие должны обладать достаточной энергией, чтобы обеспечивать его изменения. С этой точки зрения случайные процессы более детально обсуждаются в следующих главах.

Введенное выше определение корреляции давало представление о корреляции как о некотором числе, так как случайные величины не зависели в обязательном порядке от времени. Однако в примере, который мы рассмотрим ниже, каждая пара случайных величин может быть охарактеризована разделяющим их временным интервалом, при этом корреляция становится функцией этого интервала. Поэтому для данного случая подходит использование так называемой *корреляционной функции*, у которой аргументом является временной интервал между двумя случайными величинами. Если эти случайные величины являются выборочными значениями одного и того же случайного процесса, то указанная функция называется *автокорреляционной* (или просто корреляционной) *функцией* данного процесса, если же они принадлежат различным случайным процессам — *взаимной корреляционной функцией*. Сначала рассмотрим автокорреляционные функции.

Пусть $X(t)$ — некоторый случайный процесс, а случайные величины определяются как

$$X_1 = X(t_1), \quad X_2 = X(t_2),$$

тогда по определению автокорреляционная функция есть

$$R_X(t_1, t_2) = E[X_1 X_2] = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2)\, dx_2. \quad (6.1)^*$$

Это определение справедливо как для стационарных, так и для нестационарных процессов. Однако нас интересуют в основном стационарные процессы, для которых допустимо упрощение выражения (6.1). Из сказанного в предыдущей главе следует, что для стационарного в широком смысле случайного процесса любое усреднение по ансамблю не зависит от начала отсчета времени. Соответственно, для такого стационарного процесса

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 + T, t_2 + T) = E[X(t_1 + T) X(t_2 + T)].$$

Поскольку это выражение инвариантно по отношению к выбору начала отсчета времени, можно положить $T = -t_1$ и получить

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(0, t_2 - t_1) = E[X(0) X(t_2 - t_1)].$$

Очевидно, что это выражение зависит только от промежутка

*) Довольно часто функцию (6.1) называют не корреляционной, а *ковариационной* и обозначают ее через $K_X(t_1, t_2)$ — *Прим. ред.*

времени $t_2 - t_1$. Вводя обозначение $\tau = t_2 - t_1$ и опуская нуль в аргументе $R_X(0, t_2 - t_1)$, можно (6.1) переписать как

$$R_X(\tau) = E\,[X(t_1)\,X(t_1 + \tau)]. \tag{6.2}$$

Это выражение для автокорреляционной функции стационарного случайного процесса. Оно зависит только от τ и не зависит от значения t_1. Вследствие отсутствия зависимости от конкретного момента t_1, в который произведено усреднение по ансамблю, индекс в выражении (6.2) обычно опускают; таким образом, эту зависимость можно представить в виде $R_X(\tau) = E\,[X(t)\,X(t + \tau)]$. В тех случаях, когда корреляционные функции описывают нестационарные процессы, они оказываются зависящими как от момента времени t, в который было осуществлено усреднение по ансамблю, так и от временного интервала τ между реализациями и должны записываться как $R_X(t_1, t_2)$, или $R_X(t_1, \tau)$. В этой и последующих главах, если не указано особо, всюду подразумевается, что все корреляционные функции относятся к стационарным в широком смысле случайным процессам.

Можно также определить *временную автокорреляционную* функцию для отдельной реализации $x(t)$ как [1]

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \lim_{T\to\infty}(1/2T)\int_{-T}^{T} x(t)\,x(t+\tau)\,dt = \langle x(t)\,x(t+\tau)\rangle. \tag{6.3}$$

Для особого случая — *эргодического процесса*, $\langle x(t)\,x(t+\tau)\rangle$ является неизменной функцией для любой реализации $x(t)$ и равной $R_X(\tau)$, т. е. для эргодического процесса

$$\mathcal{R}_x(\tau) = R_X(\tau). \tag{6.4}$$

Предположение об эргодичности, если оно не оказывается очевидно неправомерным, часто упрощает расчет корреляционных функций.

Из (6.2) непосредственно следует, что при $\tau = 0$ в силу $R_X(0) = E\,[X(t_1)\,X(t_1)]$ автокорреляционная функция равна среднему квадрату случайного процесса. При $\tau \neq 0$ автокорреляционная функция $R_X(\tau)$ может интерпретироваться как мера подобия случайных процессов $X(t)$ и $X(t+\tau)$. Для иллюстрации данного утверждения положим, что $X(t)$ — выборочная функция центрированного стационарного случайного процесса, и образуем новую функцию

$$Y(t) = X(t) - \rho X(t+\tau).$$

Определим такую величину ρ, которая минимизирует средний квадрат процесса $Y(t)$. При этом мы получим меру подобия случайных процессов $X(t+\tau)$ и $X(t)$. Вычисление такого ρ производится путем расчета дисперсии случайного процесса $Y(t)$,

[1]) Символ $\langle\ldots\rangle$ используется для обозначения усреднения по времени.

приравнивания производной дисперсии по ρ нулю и решения полученного уравнения относительно ρ:

$$E\{[Y(t)]^2\} = E\{[X(t) - \rho X(t+\tau)]^2\} =$$
$$= E\{X^2(t) - 2\rho X(t) X(t+\tau) + \rho^2 X^2(t+\tau)\},$$

$$\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 - 2\rho R_X(\tau) + \rho^2\sigma_X^2,$$
$$d\sigma_Y^2/d\rho = -2R_X(\tau) + 2\rho\sigma_X^2 = 0, \qquad (6.5)$$
$$\rho = R_X(\tau)/\sigma_X^2.$$

Из (6.5) следует, что ρ прямо пропорционально $R_X(\tau)$ и является *коэффициентом корреляции*, определенным в разд. 3.4. Коэффициент ρ можно интерпретировать как показатель того, насколько мощность случайного процесса $X(t)$ изменилась по истечении времени τ. При этом необходимо помнить, что величина ρ здесь была рассчитана на основе статистического метода, а также что этот коэффициент является показателем того, насколько сохраняется форма случайного процесса $X(t)$ в среднем по ансамблю и не относится к отдельно взятой выборке (реализации) $x(t)$, что очень важно. Как было показано выше, коэффициент корреляции может принимать значения от $+1$ до -1. Равенство $\rho = 1$ указывает, что формы выборочных функций $x(t)$ случайного процесса $X(t)$ идентичны, т. е. полностью коррелированы. При $\rho = 0$ выборочные функции некоррелированы, т. е. не существует какого-либо фрагмента выборки случайного процесса $X(t+\tau)$, который являлся бы частью выборки процесса $X(t)$. Значение $\rho = -1$ свидетельствует об идентичности форм выборок и противоположности их знаков, а именно: форма выборки процесса $X(t+\tau)$ является зеркальным отражением формы выборочной функции процесса $X(t)$.

Для эргодического случайного процесса или детерминированных сигналов приведенные выше рассуждения применимы не только к средней мощности вместо дисперсии, но и к временной корреляционной функции вместо функции корреляции по ансамблю.

Поскольку $R_X(\tau)$ зависит от коэффициента корреляции ρ и дисперсии σ_X^2 случайного процесса $X(t)$, конкретный вид функции $R_X(\tau)$ невозможно определить без знания одной из этих величин. Например, если случайный процесс имеет нулевое математическое ожидание и положительную автокорреляционную функцию, то о случайных величинах $X(t_1)$ и $X(t_1+\tau)$ можно сказать лишь то, что у них, вероятно, одинаковые знаки [2]). Если автокорреляционная функция отрицательна, то указанные выше

[2]) Это справедливо только если $f(x_1)$ симметрична относительно оси $x_1 = 0$.

случайные величины скорее всего имеют противоположные знаки. Если же она близка к нулю, эти случайные величины могут иметь как противоположные, так и одинаковые знаки.

Упражнение 6.1.1. Случайный процесс $X(t)$ имеет вид

$$X(t) = \begin{cases} A & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 0 & \text{для других } t, \end{cases}$$

причем A является случайной величиной, равномерно распределенной между значениями -12 и 12. Пользуясь основным определением автокорреляционной функции (6.1), найдите автокорреляционную функцию этого процесса.

Ответ:

$$R_X(t_1,\ t_2) = \begin{cases} 48 & \text{при } 0 \leqslant t_1,\ t_2 \leqslant 1, \\ 0 & \text{для других } t. \end{cases}$$

Упражнение 6.1.2. Пусть случайный процесс $Z(t)$ имеет вид $Z(t) = X(t) + X(t + \tau)$, где $X(t)$ — стационарный случайный процесс, автокорреляционная функция которого равна $R_X(\tau) = \exp(-\tau^2)$. Напишите выражение для автокорреляционной функции случайного процесса $Z(t)$.

Ответ:

$$R_Z(\tau) = 2\exp(-\tau^2) + \exp[-(\tau - \tau_1)^2] + \exp[-(\tau + \tau_1)^2].$$

6.2. Пример: автокорреляционная функция бинарного случайного процесса

Приведенные выше рассуждения можно пояснить, рассмотрев в качестве примера некоторый случайный процесс, автокорреляционная функция которого имеет очень простой вид. На рис. 6.1 представлена типичная реализация дискретного стационарного центрированного случайного процесса $X(t)$ с двумя возможными значениями $\pm A$. Эта реализация может через каждые t_a секунд с одинаковой вероятностью принимать то или иное значение A или же оставаться неизменной. По отношению к ансамблю возможных временных функций (реализаций) $x(t)$ время t_0 является случайным аргументом, равномерно распределенным по интервалу длиной t_a. Это означает, что если рассмотрение проводится по всему ансамблю выборочных функций $x(t)$ случайного процесса $X(t)$, то изменение случайной величины $X(t)$ может произойти в любой момент времени t с равной вероятностью. Предполагается также, что значение этой случайной величины на любом интервале статистически не зависит от ее значений в любых других интервалах.

Хотя случайный процесс, рассмотренный выше, может показаться далеким от реального, на самом деле он дает представление о весьма распространенной ситуации. В современных цифровых системах связи сообщения, предназначенные для передачи, вначале кодируются двоичными символами. Это осуществляется посредством предварительной дискретизации передаваемого сиг-

нала в равноотстоящие друг от друга моменты времени и последующего квантования выборочных значений по конечному числу уровней, как это обсуждалось в разд. 2.7 в связи с рассмотрением плотности распределения вероятностей такого сигнала. Каждый уровень затем кодируется группой двоичных символов. Например, каждый из 256 уровней квантования может быть однозначно представлен группой из 8 двоичных символов. В свою очередь этим символам можно поставить в соответствие напряжение $+A$ или $-A$. Таким образом, последовательность двоичных символов

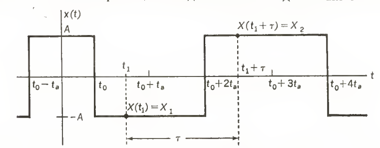


Рис. 6.1. Реализация дискретного стационарного случайного процесса.

принимает вид, показанный на рис. 6.1. Такая форма сигнала является типичной для напряжений, действующих в цепях цифровых ЭВМ и каналах связи между компьютерами. Следовательно, рассматриваемый случайный процесс является не только одним из самых простых с точки зрения возможности его анализа, но и одним из самых распространенных в окружающем нас мире.

Автокорреляционную функцию этого процесса определим исходя из эвристических рассуждений, а не путем строгих вычислений. Прежде всего можно отметить, что при $|\tau| > t_a$ моменты времени t_1 и $t_1 + \tau = t_2$ не могут находиться на одном и том же интервале, вследствие чего соответствующие этим моментам случайные величины $X_1 = X(t_1)$ и $X_2 = X(t_2)$ оказываются статистически независимыми. Поскольку X_1 и X_2 в данном случае являются центрированными величинами, можно ожидать, что их произведение будет равно нулю (см. выражение (3.22), а именно:

$$R_X(\tau) = E[X_1 X_2] = \overline{X}_1 \overline{X}_2 = 0 \text{ при } |\tau| > t_a,$$

так как $\overline{X_1} = \overline{X}_2 = 0$. Когда $|\tau| < t_a$, t_1 и $t_1 + \tau$ могут находиться или не находиться на одном и том же интервале в зависимости от t_0. Поскольку нахождение момента t_0 в любой точке на временной оси равновозможно, вероятность того, что t_1 и $t_1 + \tau$ действительно лежат на одном и том же интервале, пропорциональна разности между t_a и τ. В частности, при $\tau \geqslant 0$ очевидно, что $t_0 \leqslant t_1 \leqslant (t_1 + \tau) < t_0 + t_a$, откуда следует $t_1 + \tau - t_a <$

$< t_0 \leqslant t_1$. Следовательно, вероятность того, что t_1 и $t_1 + \tau$ находятся на одном интервале, равна

$$P[(t_1 + \tau - t_a < t_0 \leqslant t_1)] = [t_1 - (t_1 + \tau - t_a)]/t_a = (t_a - \tau)/t_a,$$

так как плотность вероятностей при t_0 как раз равна $1/t_a$. Когда $\tau < 0$, очевидно, что $t_0 \leqslant t_1 + \tau \leqslant t_1 < t_0 + t_a$, откуда следует, что $t_1 - t_a < t_0 \leqslant t_1 + \tau$. Таким образом, вероятность того, что t_1 и $t_1 + \tau$ находятся на одном интервале, равна

$$P[(t_1 - t_a) < t_0 \leqslant (t_1 + \tau)] = [t_1 + \tau - (t_1 - t_a)]/t_a = (t_a + \tau)/t_a.$$

Обобщая полученные выражения, запишем

$$P(t_1 \text{ и } t_1 + \tau \text{ находятся на одном и том же интервале}) = (t_a - |\tau|)/t_a.$$

Если они располагаются на одном интервале, то произведение X_1 и X_2 равно всегда A^2, в противном случае можно ожидать, что их произведение равно нулю. В результате имеем

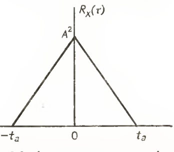


Рис. 6.2. Автокорреляционная функция случайного процесса, показанного на рис. 6.1.

$$R_X(\tau) = \begin{cases} A^2[(t_a - |\tau|)/t_a] = A^2[1 - |\tau|/t_a] & \text{при } 0 \leqslant \tau \leqslant t_a, \\ 0 & \text{при } |\tau| > t_a. \end{cases} \quad (6.6)$$

Вид этой функции показан на рис. 6.2.

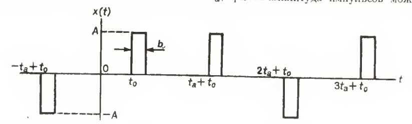
Представляет интерес физическая интерпретация полученной автокорреляционной функции в свете вышеприведенных рассуждений. Можно отметить, что если $|\tau|$ достаточно мало (меньше t_a), вероятность того, что значения $X(t_1)$ и $X(t_1 + \tau)$ равны и автокорреляционная функция положительна, достаточно велика. Если $|\tau| > t_a$, то ситуации, когда $X(t_1)$ и $X(t_1 + \tau)$ будут одинаковы, но противоположны по знаку, равновозможны. При этом автокорреляционная функция примет нулевое значение. В случае когда $\tau = 0$, автокорреляционная функция становится равной среднему квадрату случайного процесса, т. е. $R_X(0) = A^2$.

Упражнение 6.2.1. Речевой сигнал дискретизируется 8000 раз в секунду, и каждая выборка квантуется на 128 уровней. Полученные уровни подвергаются двоичному кодированию напряжением величиной ± 2. Полагая, что двоичные импульсы в последовательности статистически независимы, напишите автокорреляционную функцию бинарного процесса.

Ответ:

$$R_X(\tau) = \begin{cases} 4(1 - 56\,000|\tau|) & \text{при } 0 \leqslant |\tau| \leqslant 1/56\,000, \\ 0 & \text{для других } |\tau|. \end{cases}$$

Упражнение 6.2.2. На рисунке показана реализация $x(t)$ стационарного случайного процесса $X(t)$. Случайный параметр характеризуется равномерным распределением между значениями 0 и t_a, причем амплитуда импульсов может



с равной вероятностью и независимо от номера импульса принимать значения $\pm A$. Найдите автокорреляционную функцию этого процесса.

Ответ:

$$R_X(\tau) = \begin{cases} A^2 (b/t_a) [1 - |\tau/b|] & \text{при } |\tau| \leqslant b, \\ 0 & \text{при } |\tau| > b. \end{cases}$$

6.3. Свойства автокорреляционных функций

Поскольку автокорреляционные функции играют весьма полезную роль в представлении случайных процессов и при анализе систем, оперирующих со случайными входными сигналами, необходимо иметь возможность сопоставить свойства автокорреляционной функции со свойствами представляемого ею случайного процесса. В этом разделе обобщаются некоторые свойства всех автокорреляционных функций стационарных и эргодических случайных процессов. Читателю следует обратить особое внимание на эти свойства, так как в дальнейшем они будут многократно использоваться.

1. $R_X(0) = \overline{X^2}$. Таким образом, средний квадрат случайного процесса $X(t)$ легко найти, положив в его автокорреляционной функции $\tau = 0$.

Следует подчеркнуть, что $R_X(0)$ является средним квадратом случайного процесса $X(t)$ независимо от того, равно ли его математическое ожидание нулю, или нет. Если математическое ожидание $\overline{X}$ равно нулю, то средний квадрат равен дисперсии этого процесса.

2. $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$. Автокорреляционная функция является четной относительно τ.

Это наиболее очевидно, вероятно, когда автокорреляционная функция усреднена по времени, что для эргодического случайного процесса равносильно усреднению по ансамблю. В этом случае производится усреднение по времени для того же самого произведения, независимо от направления временного сдвига одной из функций. Свойство симметрии исключительно полезно при вы-

числении автокорреляционной функции случайного процесса, поскольку оно означает, что данное вычисление можно произвести только для положительных τ, а результат для отрицательных τ определить на основании свойства симметрии. Таким образом, при расчетах, проведенных в примере разд. 6.2, можно было учитывать только $\tau \geqslant 0$. Для нестационарного процесса свойство симметрии справедливо не всегда.

3. $|R_X(\tau)| \leqslant R_X(0)$. Наибольшее значение автокорреляционная функция, как правило, принимает при $\tau = 0$. Однако в ряде случаев могут существовать иные значения τ, для которых эта функция имеет такое же значение (например, для периодической функции $X(t)$), но и для них $R_X(\tau)$ не может быть больше $R_X(0)$. Это видно из следующих рассуждений:

$$E[(X_1 \pm X_2)^2] = E[X_1^2 + X_2^2 \pm 2X_1X_2] \geqslant 0,$$
$$E[X_1^2 + X_2^2] = 2R_X(0) \geqslant |E(2X_1X_2)| = 2|R_X(\tau)|, \qquad (6.7)$$
$$R_X(0) \geqslant |R_X(\tau)|.$$

4. Если $X(t)$ содержит постоянную составляющую или имеет ненулевое математическое ожидание, то функция $R_X(\tau)$ также будет иметь постоянную составляющую. Например, если $X(t) = A$, то

$$R_X(\tau) = E[X(t_1)X(t_1+\tau)] = E[AA] = A^2. \qquad (6.8)$$

Предположим теперь, что функция $X(t)$ может быть представлена в форме суммы ее математического ожидания $\overline{X}$ и составляющей $N(t)$ с нулевым математическим ожиданием так, что $X(t) = \overline{X} + N(t)$, тогда

$$R_X(\tau) = E\{[\overline{X} + N(t_1)][\overline{X} + N(t_1+\tau)]\} =$$
$$= E[(\overline{X})^2 + \overline{X}N(t_1) + \overline{X}N(t_1+\tau) + N(t_1)N(t_1+\tau)] =$$
$$= (\overline{X})^2 + R_N(\tau), \qquad (6.9)$$

так как по условию $E[N(t_1)] = E[N(t_1+\tau)] = 0$. Таким образом, и в этом случае $R_X(\tau)$ содержит постоянную составляющую, равную квадрату математического ожидания $(\overline{X})^2$ процесса $X(t)$.

При рассмотрении эргодического случайного процесса значение математического ожидания может быть определено по автокорреляционной функции при τ, стремящемся к бесконечности, и при условии, что любыми периодическими составляющими автокорреляционной функции в пределе можно пренебречь. Поскольку в результате таких вычислений получается только квадрат математического ожидания $\overline{X}$, определение его знака не пред-

ставляется возможным. Если исследуемый случайный процесс стационарный, но не эргодический, функция $R_X(\tau)$ может и не содержать никакой информации относительно его математического ожидания. Например, случайный процесс X с выборочным значением вида $x(t) = A$, где A — случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_A^2, имеет автокорреляционную функцию $R_X(\tau) = \sigma_A^2$ для любых τ. Таким образом, автокорреляционная функция при $\tau = \infty$ не обращается в нуль, даже несмотря на то что математическое ожидание процесса $X(t)$ равно нулю. Этот странный результат является следствием того, что рассматриваемый случайный процесс не является эргодическим.

5. Если $X(t)$ — периодический процесс, то $R_X(\tau)$ также будет периодической функцией с таким же периодом. Например, пусть $X(t) = A\cos(\omega t + \theta)$, где A и ω — постоянные, а θ — случайная величина, равномерно распределенная в диапазоне от 0 до 2π,

$$f(\theta) = \begin{cases} 1/2\pi & \text{при } 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \\ 0 & \text{при других } \theta. \end{cases}$$

Тогда

$$R_X(\tau) = E[A\cos(\omega t_1 + \theta) A\cos(\omega t_1 + \omega\tau + \theta)] =$$

$$= E[(A^2/2)\cos(2\omega t_1 + \omega\tau + 2\theta) + (A^2/2)\cos\omega\tau] =$$

$$= (A^2/2)\int_0^{2\pi}(1/2\pi)[\cos(2\omega t_1 + \omega\tau + 2\theta) + \cos\omega\tau]\,d\theta = (A^2/2)\cos\omega\tau. \tag{6.10}$$

В более общем случае $X(t) = A\cos(\omega t + \theta) + N(t_1)$, где θ и $N(t_1)$ — статистически независимые случайные величины для всех t_1, с помощью метода, использованного при выводе (6.9), легко показать, что

$$R_X(\tau) = (A^2/2)\cos\omega\tau + R_N(\tau). \tag{6.11}$$

Следовательно, автокорреляционная функция и в этом случае содержит периодическую составляющую.

Это свойство автокорреляционных функций может быть распространено на случайные процессы, содержащие любое количество периодических компонентов. Если случайные процессы, содержащие периодические составляющие, статистически независимы, то автокорреляционная функция суммы периодических компонентов равна просто сумме периодических автокорреляционных функций каждой из этих составляющих. Это утверждение справедливо независимо от того, являются ли составляющие гармонически связанными, или нет.

Если каждая реализация $x(t)$ случайного процесса $X(t)$ является периодической функцией и представима рядом Фурье, результирующая автокорреляционная функция также периодична и также представима рядом Фурье. Однако этот ряд Фурье будет содержать больше членов, чем просто сумма автокорреляционных функций отдельных компонентов, если случайные параметры, связанные с различными составляющими такого процесса, не являются статистически независимыми. Общим случаем, когда случайные параметры не являются независимыми, может считаться ситуация, при которой у случайного процесса имеется лишь один случайный параметр, а именно — случайная задержка каждой реализации, равномерно распределенная по длительности основного периода.

6. Если $X(t)$ — центрированный эргодический случайный процесс, не содержащий периодических составляющих, то

$$\lim_{|\tau|\to\infty} R_X(\tau) = 0. \tag{6.12}$$

При больших τ в силу того, что влияние значений этого процесса, имевших место в прошлом, уменьшается во времени, случайные величины $X(t)$ и $X(t+\tau)$ становятся статистически независимыми.

7. Форма автокорреляционных функций не может быть произвольной. Один из возможных способов определения их формы заключается в расчете преобразования Фурье

$$\mathcal{F}[R_X(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \exp[-j\omega t]\, d\tau \tag{6.13}$$

при $\mathcal{F}[R_X(\tau)] \geqslant 0$ для всех ω.

Смысл ограничения станет очевидным после рассмотрения спектральной плотности в гл. 7. Кроме всего прочего это ограничение отрицает возможность существования автокорреляционных функций с плоскими вершинами, вертикальными боковыми сторонами или какими-либо разрывами в их графических изображениях.

В связи с рассмотрением автокорреляционных функций следует подчеркнуть еще одно обстоятельство. Хотя, согласно (6.1), знание совместной плотности распределения вероятностей $f(x_1, x_2)$ случайного процесса $X(t)$ является достаточным для однозначного вычисления автокорреляционной функции $R_X(t_1, t_2)$, обратное утверждение не является справедливым. Может существовать множество различных случайных процессов с одинаковыми автокорреляционными функциями. С другой стороны, как будет показано ниже, влияние линейных систем на вид автокорреляционной функции входного сигнала может быть рассчитано без

знания совместной плотности распределения вероятностей этого сигнала. Таким образом, знание корреляционной функции случайного процесса не эквивалентно знанию плотности распределения вероятностей и является значительно менее информативным, чем знание совместной функции распределения.

Упражнение 6.3.1. а) Эргодический случайный процесс $X(t)$ имеет автокорреляционную функцию вида

$$R_X(\tau) = 25 \exp(-4|\tau|) + 16 \cos 20\tau + 36.$$

Найдите средний квадрат, математическое ожидание и дисперсию этого процесса.

б) Автокорреляционная функция эргодического случайного процесса $X(t)$ имеет вид

$$R_X(\tau) = (25\tau^2 + 36)/(6{,}25\tau^2 + 4).$$

Найдите средний квадрат, математическое ожидание и дисперсию этого процесса.

Ответы: ± 2, 5, ± 6, 9, 41, 77.

Упражнение 6.3.2. Для каждой из следующих функций от τ определите максимальное значение постоянной A, при котором эти функции могут быть автокорреляционными функциями:

а) $9 \exp[-4|\tau|] - A \exp[-6|\tau|]$,
б) $10 \exp[-4|\tau - A|]$,
в) $20 \cos 5\tau + A \sin 5\tau$.
Ответы: 0, 0, 6.

6.4. Измерение автокорреляционных функций

Поскольку автокорреляционная функция играет важную роль в анализе линейных систем со случайными входными сигналами, важной практической задачей при экспериментальном наблюдении случайных процессов является определение этой функции. В общем случае она не может быть вычислена исходя из совместных плотностей распределения вероятностей, так как они редко бывают известны. Усреднение по ансамблю также невозможно, поскольку обычно приходится иметь дело лишь с одной реализацией. При этих обстоятельствах единственно возможной операцией является расчет временной автокорреляционной функции на ограниченном интервале в предположении, что случайный процесс — эргодический.

Для пояснения вышеизложенного предположим, что какой-то случайный процесс $X(t)$ наблюдается в течение интервала времени от 0 до T секунд в форме реализации напряжения или тока $x(t)$. При этом можно ввести понятие *приближенной* (*оценочной*) корреляционной функции в виде

$$\hat{R}_X(\tau) = [1/(T - \tau)] \int_0^{T-\tau} x(t)\, x(t+\tau)\, dt \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \tau \ll T. \quad (6.14)$$

По всему ансамблю возможных реализаций $x(t)$ эта приближенная функция является случайной. Обратите внимание, что время усреднения равно $T - \tau$, а не T, потому что указанная реализация (выборочная функция) охватывает только часть наблюдаемых данных, включающих как $x(t)$, так и $x(t+\tau)$.

На практике выполнить интегрирование в выражении (6.14), как правило, невозможно, поскольку математическое выражение для $x(t)$ не известно. Выход заключается в аппроксимации интеграла суммой выборок из непрерывной временной функции в отдельные моменты времени. Таким образом, если выборки из какой-либо реализации $x(t)$ случайного процесса $X(t)$ соответствуют моментам времени $0,\ \Delta t,\ 2\Delta t,\ \ldots,\ N\Delta t$ и если их значения $x(t)$ равны $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N$, то дискретным эквивалентом выражения (6.14) будет

$$\widehat{R}_X(n\Delta t) = [1/(N-n+1)] \sum_{k=0}^{N-n} X_k X_{k+n}$$

$$\text{при } n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ M \text{ и } M \ll N. \qquad (6.15)$$

Эта приближенная (оценочная) функция по всему ансамблю возможных выборок $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N$ также является случайной и обозначается $\widehat{R}_X(n\ \Delta t)$. Так как значение N весьма велико (порядка нескольких тысяч), лучше всего операцию (6.15) производить с помощью цифровой ЭВМ.

Чтобы оценить качество сделанного приближения, необходимо определить математическое ожидание и дисперсию функции $\widehat{R}_X(n\ \Delta t)$, поскольку она является случайной, а ее точное значение зависит от конкретной рассматриваемой реализации и соответствующего ей набора выборок. Математическое ожидание получить довольно легко, так как

$$E[\widehat{R}_X(n\Delta t)] = E\left[1/(N-n+1) \sum_{k=0}^{N-n} X_k X_{k+n}\right] =$$

$$= [1/(N-n+1)] \sum_{k=0}^{N-n} E[X_k X_{k+n}] =$$

$$= [1/(N-n+1)] \sum_{k=0}^{N-n} R_X(n\Delta t) = R_X(n\Delta t).$$

Таким образом, математическое ожидание этого приближения совпадает с точными значениями автокорреляционной функции и является ее несмещенной оценкой.

Хотя приближенная функция, описываемая выражением (6.15), является несмещенной, она не будет непременно наилучшей (эффективной) оценкой по критерию минимума среднего квадрата ошибки и к тому же представлена она в форме, непригодной для

практического применения. Вместо нее обычно используется следующее выражение:

$$\widehat{R}_X(n\Delta t) = [1/(N+1)] \sum_{k=0}^{N-n} X_k X_{k+n}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ M, \quad (6.16)$$

представляющее собой смещенную оценку автокорреляционной функции, которая в явном виде присутствует в выражении (6.15), для $E\ [\widehat{R}_X\ (n\ \Delta t)]$, полученном выше. Поскольку в обоих случаях формулы отличаются друг от друга только коэффициентом, математическим ожиданием этого нового приближения следует просто считать величину

$$E[\widehat{R}_X(n\Delta t)] = [1 - n/(N+1)]\, R_X(n\Delta t),$$

где $nR_X\ (n\ \Delta t)/(N+1)$ — смещение. При $N \gg n$ это смещение невелико. Хотя такое приближение является смещенной оценкой автокорреляционной функции, в большинстве случаев его средний квадрат ошибки оказывается несколько меньше, чем в случае, описанном выражением (6.15). Кроме того, уравнение (6.16) более доступно для вычислений. Программа для расчета на ЭВМ дана в приложении Ж.

Труднее определить дисперсию данного приближения, детали таких вычислений выходят за рамки нашего рассмотрения. Тем не менее можно показать, что эта дисперсия должна удовлетворять условию

$$D[\widehat{R}_X(n\Delta t)] \leqslant (2/N) \sum_{k=-M}^{M} R_X^2(k\Delta t). \quad (6.17)$$

В этом выражении подразумевается, что $2M+1$ приблизительных (оценочных) значений автокорреляционной функции перекрывают область, в которой эта функция имеет достаточно большую амплитуду. Если произведение $(2M+1)\ \Delta t$ мало, то дисперсия, определяемая выражением (6.17), может также быть незначительной. При известном или полученном в результате измерений математическом описании автокорреляционной функции более точная дисперсия приближенного значения имеет вид

$$D[\widehat{R}_X(n\Delta t)] \leqslant (2/T) \int_{-\infty}^{\infty} R_X^2(\tau)\, d\tau, \quad (6.18)$$

где $T = N\ \Delta t$ — длительность наблюдаемой реализации (выборки).

Чтобы убедиться в значении этого результата для определения количества реализаций (объема выборок), необходимых для получения заданной точности, рассмотрим следующий пример. Предположим, что необходимо дать оценку корреляционной функции,

имеющей форму, показанную на рис. 6.2, при наличии четырех точек по обе стороны от центра ($M = 4$). Если допустимая средняя квадратическая ошибка составляет не более 5 % [3]), из уравнения (6.17) следует, что (поскольку $t_a = 4\,\Delta t$)

$$(0{,}05A^2)^2 \geqslant (2/N) \sum_{k=-4}^{4} A^4 [1 - |k|\,\Delta t/(4\Delta t)]^2.$$

Решение этого уравнения относительно N дает $N \geqslant 2200$. Ясно, что для получения достаточно точных оценок автокорреляционных функций необходимо проводить множество расчетов, используя выборки большого объема.

Упражнение 6.4.1. Автокорреляционная функция эргодического процесса $X(t)$ имеет вид

$$R_X(\tau) = 10\,(\sin \pi\tau/(\pi\tau))^2.$$

а) В каком диапазоне значений τ должно существовать приближенное значение автокорреляционной функции, чтобы охватить два первых нуля самой функции?

б) Какой должна быть длительность исследуемой реализации $x(t)$, если необходимо получить приближенное значение автокорреляционной функции на интервале, указанном в п. а.?

в) Какой должен быть объем выборки случайного процесса, чтобы средний квадрат ошибки приближенного значения не превысил 5 % истинного максимума автокорреляционной функции?

Ответы: 0,1, 2, 5331.

Упражнение 6.4.2. С учетом ограничений, накладываемых на значение дисперсии интегралом в выражении (6.18), найдите объем выборки, необходимый для приближенной оценки автокорреляционной функции из упражнения 6.4.1.

Ответ: 5333.

6.5. Примеры автокорреляционных функций

Прежде чем перейти к рассмотрению взаимных корреляционных функций, стоит привести типичные автокорреляционные функции, учесть условия, в которых они могут быть сформированы, и перечислить возможные приложения. Это обсуждение не претендует на то, чтобы быть исчерпывающим, а направлено прежде всего на демонстрацию результатов некоторых рассуждений.

Корреляционная функция треугольной формы, показанная на рис. 6.2, является типичным примером автокорреляционной функции случайной двоичной последовательности, моменты переключений в которой равномерно распределяются на временной оси. Сигналы такого типа существуют во многих цифровых системах связи и управления, где непрерывные сообщения периоди-

[3]) При этом подразумевается, что стандартное отклонение приближенного значения автокорреляционной функции не должно превышать 5 % математического ожидания случайной величины.

чески дискретизируются, квантуются и полученные выборки преобразуются в двоичные числа. Вид корреляционной функции, представленной на рис. 6.2, предполагает наличие нулевого математического ожидания случайного процесса, но это справедливо не всегда. Если, например, случайный сигнал может принимать значения A и 0 (а не $-A$), то математическое ожидание такого процесса равно $A/2$, а средний квадрат — $A^2/2$. Автокорреляционная функция, вид которой представлен на рис. 6.3, соответствует формуле (6.9).

Не все бинарные временные функции имеют треугольную автокорреляционную функцию. Примером может служить другой

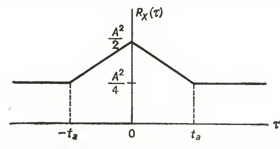


Рис. 6.3. Автокорреляционная функция нецентрированного бинарного случайного процесса.

распространенный вид двоичного сигнала, у которого переключения происходят в случайные моменты времени. Если эти моменты равновозможны, плотность вероятностей, связанная с длительностью каждого интервала, является экспоненциальной функцией, как показано в разд. 2.7. Результирующая автокорреляционная функция также экспоненциальная (рис. 6.4). Такая автокорреляционная функция представляется обычно выражением

$$R_X(\tau) = A^2 \exp[-\alpha|\tau|], \tag{6.19}$$

где α — среднее число переключений в 1 с.

Двоичные сигналы и корреляционные функции вида, показанного на рис. 6.4, характерны для устройств, предназначенных для контроля за радиационной обстановкой. Случайные импульсы, возникающие на выходе детектора частиц, используются для запуска триггера, генерирующего двоичный сигнал. Сигналы такого вида удобны как для измерения математического ожидания временного интервала между появлением частиц, так и для определения средней частоты их появления.

Корреляционные функции недвоичных сигналов также могут иметь экспоненциальный вид. Например, если очень широкополосный шумовой сигнал (имеющий практически любую плот-

ность распределения вероятностей) пропустить через RC-фильтр низких частот, то у сигнала на выходе этого фильтра будет почти экспоненциальная автокорреляционная функция. Этот результат подробно рассматривается в гл. 8.

Как треугольная, так и экспоненциальная автокорреляционные функции имеют общее свойство, о котором стоит упомянуть, это разрыв производной в нуле. Случайные процессы, автокорреляционные функции которых обладают указанным свойством, называются *недифференцируемыми*, а у недифференцируемого случайного процесса дисперсия производной бесконечна. Например, если напряжение, изменяющееся по случайному закону

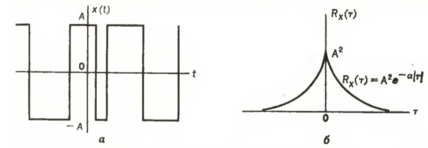


Рис. 6.4. *а* — бинарный сигнал со случайным распределением моментов переключения, *б* — соответствующая автокорреляционная функция.

и имеющее экспоненциальную автокорреляционную функцию, подать на конденсатор, то ток заряда будет пропорционален производной напряжения. Дисперсия его окажется бесконечной. Поскольку это не имеет физического смысла, можно сделать вывод, что случайные процессы с идеальными треугольными или экспоненциальными автокорреляционными функциями в природе существовать не могут. Несмотря на этот, несомненно, правильный вывод, как треугольная, так и экспоненциальная автокорреляционные функции являются во многих случаях полезными моделями. Тем не менее следует быть осторожным, поскольку их нельзя применить в тех ситуациях, когда требуется определить производную случайного процесса, поскольку проводимые при этом расчеты почти наверняка окажутся неправильными.

Все рассмотренные до сих пор корреляционные функции были положительны для любых τ. Однако это не является обязательным, и для иллюстрации данного утверждения ниже приведены выражения для двух известных автокорреляционных функций, у которых существуют отрицательные значения:

$$R_X(\tau) = A^2 \exp[-\alpha|\tau|] \cos \beta\tau, \qquad (6.20)$$

$$R_X(\tau) = A^2 \sin \pi\gamma\tau/(\pi\gamma\tau). \qquad (6.21)$$

Вид этих функций приведен на рис. 6.5. Автокорреляционная функция (6.20) соответствует сигналу, появляющемуся на выходе узкополосного полосового фильтра, на вход которого поступает достаточно широкополосный шум, а автокорреляционная функция (6.21) относится к сигналу на выходе идеального фильтра нижних частот. Оба этих результата будут выведены в гл. 7 и 8.

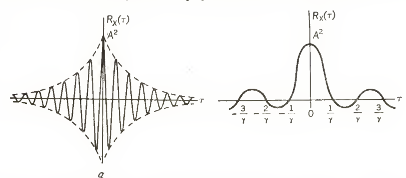


Рис. 6.5. Автокорреляционная функция сигнала на выходе *а* — полосового фильтра; *б* — идеального фильтра нижних частот.

Хотя при анализе сигналов и свойств систем можно придти к рассмотрению множества других видов автокорреляционных функций, те немногие, которые обсуждены в этом разделе, встречаются наиболее часто. Читателю следует обратиться к материалу о свойствах автокорреляционных функций, изложенному в разд. 6.3, и самостоятельно убедиться, что данные корреляционные функции обладают указанными свойствами.

Упражнение 6.5.1. а) Дифференцируемы ли случайные процессы, автокорреляционные функции которых описываются выражениями (6.20) и (6.21)?

б) Правильно или ошибочно следующее утверждение: «Функция, являющаяся произведением функции, дифференцируемой в точке начала отсчета времени, и функции, недифференцируемой в той же точке, всегда дифференцируема.»? Проверьте сделанное заключение на автокорреляционной функции, представленной уравнением (6.20).

Ответы: Да, да, правильно.

Упражнение 6.5.2. Какие из следующих функций от τ не могут являться математическими моделями автокорреляционных функций? Объясните, почему.

а) $\exp(-\tau^2)$, б) $|\tau| \exp(-|\tau|)$,
в) $10 \exp[-(\tau + 2)]$, г) $(\sin^2 \pi\tau)/(\pi\tau)^2$,
д) $(\tau^2 + 4)/(\tau^2 + 8)$.

Ответы: Функции (б), (в), (д) не являются математическими моделями.

6.6. Взаимные корреляционные функции

Можно рассматривать корреляцию между двумя случайными величинами, принадлежащими к различным случайным процессам. Такая ситуация возникает, когда на систему действует более

одного случайного сигнала или если требуется сравнить случайно изменяющиеся напряжения или токи, действующие в различных точках системы. Если два случайных процесса $X(t)$ и $Y(t)$ совместно стационарны в широком смысле, то для случайных величин

$$X_1 = X(t_1),\ Y_2 = Y(t_1 + \tau)$$

можно определить *взаимную корреляционную функцию*

$$R_{XY}(\tau) = E[X_1 Y_2] = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 f(x_1,\ y_2)\, dy_2. \qquad (6.22)$$

Здесь важен порядок написания индексов: второй из них относится к случайной величине, измеренной в момент $(t_1 + \tau)$ [4]).

Существует еще один вид взаимной корреляционной функции, которую можно определить для тех же двух моментов времени. Пусть $Y_1 = Y(t_1)$, $X_2 = X(t_1 + \tau)$. Тогда по определению

$$R_{YX}(\tau) = E[Y_1 X_2] = \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \int_{-\infty}^{\infty} y_1 x_2 f(y_1,\ x_2)\, dx_2. \qquad (6.23)$$

Поскольку оба случайных процесса $X(t)$ и $Y(t)$ являются совместно стационарными, приведенные взаимные корреляционные функции зависят только от временного интервала τ. Для стационарных случайных процессов, не обладающих свойством совместной стационарности, указанная зависимость не наблюдается.

Пусть имеются два стационарных случайных процесса, которые не являются совместно стационарными. В таком случае взаимная корреляционная функция будет зависеть как от начала отсчета времени t_1, так и от временного интервала τ.

Временные взаимные корреляционные функции для пары реализаций $x(t)$ и $y(t)$ случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ могут быть определены так же, как и выше, а именно

$$\mathcal{R}_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} (1/2T) \int_{-T}^{T} x(t)\, y(t+\tau)\, dt, \qquad (6.24)$$

$$\mathcal{R}_{yx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} (1/2T) \int_{-T}^{T} y(t)\, x(t+\tau)\, dt. \qquad (6.25)$$

Если случайные процессы являются совместно эргодическими, то выражения (6.24) и (6.25) дают одинаковые значения для каж-

[4]) Это спорное утверждение, которое различные авторы интерпретируют по-разному. В каждом конкретном случае оно должно быть проверено специально.

дой пары реализаций. Таким образом, для эргодических процессов имеем

$$\mathscr{R}_{xy}(\tau) = R_{XY}(\tau), \tag{6.26}$$

$$\mathscr{R}_{yx}(\tau) = R_{YX}(\tau). \tag{6.27}$$

Вообще же, взаимные корреляционные функции представляют собой такую же физическую реальность, как и автокорреляционные функции, и являются мерой зависимости друг от друга двух случайных процессов. Тем не менее при дальнейшем изучении основ системного анализа мы увидим, что взаимная корреляционная функция, связывающая сигналы на входе и выходе системы, будет иметь вполне конкретный и важный физический смысл.

Упражнение 6.6.1. Два совместно стационарных случайных процесса имеют вид

$$X(t) = 5\cos(10t + \theta),\ Y(t) = 20\sin(10t + \theta),$$

где θ — случайная величина, равномерно распределенная в интервале от 0 до 2π. Найдите взаимную корреляционную функцию для этих процессов.
Ответ: $50 \sin 10\tau$.

Упражнение 6.6.2. Реализации двух случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ имеют вид

$$x(t) = 5\cos 10t,\ y(t) = 20\sin 10t.$$

Найдите временную взаимную корреляционную функцию для $x(t)$ и $y(t)$.
Ответ: $50 \sin 10\tau$.

6.7. Свойства взаимных корреляционных функций

Основные свойства всех взаимных корреляционных функций весьма существенно отличаются от свойств автокорреляционных функций. Их можно обобщить следующим образом.

1. Значения $R_{XY}(0)$ и $R_{YX}(0)$ не имеют никакого реального физического смысла и не соответствуют средним квадратам случайных величин $X = X(t)$ и $Y = Y(t)$. Тем не менее равенство $R_{XY}(0) = R_{YX}(0)$ справедливо.

2. В общем случае взаимные корреляционные функции не являются четными относительно τ. Тем не менее существует вид симметрии, описываемый соотношением

$$R_{YX}(\tau) = R_{XY}(-\tau). \tag{6.28}$$

Этот результат следует из того факта, что сдвиг $Y(t)$ во времени в определенном направлении эквивалентен сдвигу $X(t)$ в противоположном направлении.

3. Взаимная корреляционная функция необязательно должна иметь максимум при $\tau = 0$. Тем не менее можно показать, что

$$|R_{XY}(\tau)| \leqslant [R_X(0)\, R_Y(0)]^{1/2}, \tag{6.29}$$

причем аналогичное соотношение справедливо и для $R_{YX}(\tau)$. Максимум взаимной корреляционной функции может оказаться при каком угодно τ, но не может превысить значения (6.29). Более того, он может не достигаться ни при каких τ.

4. Если два случайных процесса статистически независимы, то

$$R_{XY}(\tau) = E[X_1 Y_2] = E[X_1] E[Y_2] = \overline{X}\,\overline{Y} = R_{YX}(\tau). \quad (6.30)$$

Если математическое ожидание либо одного, либо обоих процессов равно нулю, взаимная корреляционная функция равна нулю при любых τ. Обратное утверждение необязательно должно быть справедливым. Из того факта, что взаимная корреляционная функция равна нулю и математическое ожидание одного из процессов равно нулю, статистической независимости процессов не следует. Исключением являются совместные гауссовские случайные процессы.

5. Если $X(t)$ — стационарный случайный процесс и $\dot{X}(t)$ — его производная по времени, их взаимная корреляционная функция имеет вид

$$R_{X\dot{X}}(\tau) = dR_X(\tau)/d\tau, \quad (6.31)$$

где в правой части стоит производная автокорреляционной функции по τ. Это легко показать, используя основное определение производной

$$\dot{X}(t) = \lim_{\Delta\tau \to 0} [X(t + \Delta\tau) - X(t)]/\Delta\tau.$$

Отсюда

$$R_{X\dot{X}}(\tau) = E[X(t)\,\dot{X}(t+\tau)] =$$
$$= E\left\{\lim_{\Delta\tau \to 0} [X(t)\,X(t+\tau+\Delta\tau) - X(t)\,X(t+\tau)]/\Delta\tau\right\} =$$
$$= \lim_{\Delta\tau \to 0} [R_X(\tau + \Delta\tau) - R_X(\tau)]/\Delta\tau = dR_X(\tau)/d\tau.$$

Взаимная замена предельного и вероятностного переходов правомерна во всей области существования $\dot{X}(t)$. Если вышеприведенные операции повторить, то можно показать, что автокорреляционная функция от $\dot{X}(t)$ есть

$$R_{\dot{X}}(\tau) = R_{\dot{X}\dot{X}}(\tau) = -d^2 R_X(\tau)/d\tau^2, \quad (6.32)$$

где правая часть есть вторая производная по τ основной автокорреляционной функции.

Стоит отметить, что требования к существованию взаимной корреляционной функции менее строги, чем к существованию автокорреляционных функций. Обычно взаимные корреляционные функции — это нечетные функции от τ, их фурье-преобразования

не обязательно должны быть положительными для всех ω, и даже не обязательно, чтобы фурье-преобразования были вещественными. Два этих свойства обсуждаются более подробно в следующей главе.

Упражнеиие 6.7.1. Докажнте иеравенство (6.29). Наиболее просто это осуществить, вычисляя математическое ожндаине случайиой величнны

$$[X_1/R_X^{1/2}(0) \pm Y_2/R_Y^{1/2}(0)]^2.$$

Упражнение 6.7.2. Два случайных процесса имеют внд

$$X(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta),\ Y(t) = B\sin(\omega_0 t + \theta),$$

где θ — случайная величииа, равномерно распределеиная между 0 и 2π, а A и B — постояииые.

а) Определнте взаимные корреляционные фуикции $R_{XY}(\tau)$ и $R_{YX}(\tau)$.

б) Каковы зиачеиия этих взаимных корреляциоиных фуикций при $\tau = 0$?

Ответ: $(1/2)\sin\omega_0\tau$.

6.8. Примеры и приложения взаимных корреляционных функций

Выше отмечалось, что одно из приложений взаимных корреляционных функций связано с системами, на входы которых подаются два или более случайных процесса. Для более подробного рассмотрения этой ситуации предположим, что случайный процесс $Z(t)$ представляет собой аддитивную смесь $Z(t) = X(t) \pm \pm Y(t)$, где $X(t)$ и $Y(t)$ — стационарные случайные процессы. Теперь, определяя случайные величины как

$$Z_1 = X_1 \pm Y_1 = X(t_1) \pm Y(t_1),\quad Z_2 = X_2 \pm Y_2 = X(t_1 + \tau) \pm \pm Y(t_1 + \tau),$$

можно получить автокорреляционную функцию процесса $Z(t)$ как

$$R_Z(\tau) = E[Z_1 Z_2] = E[(X_1 \pm Y_1)(X_2 \pm Y_2)] = = E[X_1X_2 + Y_1Y_2 \pm X_1Y_2 \pm Y_1X_2] = = R_X(\tau) + R_Y(\tau) \pm R_{XY}(\tau) \pm R_{YX}(\tau). \quad (6.33)$$

Этот результат легко распространяется на сумму любого числа случайных процессов. В общем случае автокорреляционная функция такой суммы равна сумме всех автокорреляционных функций плюс-минус сумма всех взаимных корреляционных функций.

Если два рассматриваемых случайных процесса статистически независимы и математическое ожидание одного из них равно нулю, то обе взаимные корреляционные функции $R_{XY}(\tau)$ и $R_{YX}(\tau)$ в выражении (6.33) обращаются в нуль, и автокорреляционная функция суммы оказывается равной сумме автокорреляционных функций. Примером того, насколько важен этот результат, служит ситуация, связанная с задачей выделения периоди-

ческих сигналов из случайного шума. Пусть $X(t)$ — случайный исследуемый сигнал (процесс), имеющий вид

$$X(t) = A\cos(\omega t + \theta), \tag{6.34}$$

где θ — случайный параметр. Выше показано, что автокорреляционная функция такого процесса равна

$$R_X(\tau) = (A^2/2)\cos\omega t.$$

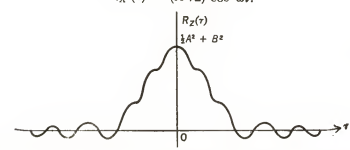


Рис. 6.6. Автокорреляционная функция аддитивной смеси гармонического сигнала и шума.

Далее, пусть $Y(t)$ — случайный шум с нулевым математическим ожиданием, статистически независимый от сигнала. Пусть его автокорреляционная функция представлена в виде

$$R_Y(\tau) = B^2\exp[-\alpha|\tau|].$$

Наблюдаемый процесс $Z(t)$, согласно (6.33), имеет автокорреляционную функцию

$$R_Z(\tau) = R_X(\tau) + R_Y(\tau) = (A^2/2)\cos\omega\tau + B^2\exp[-\alpha|\tau|]. \tag{6.35}$$

График этой функции для случая, когда средняя мощность шума $B^2 = R_Y(0)$ много больше средней мощности сигнала $A^2/2 = R_X(0)$, приведен на рис. 6.6. Из этого графика ясно, что для больших τ автокорреляционная функция зависит в основном от величины сигнала, поскольку автокорреляционная функция шума стремится к нулю при τ, стремящемся к бесконечности. Таким образом, если использовать подходящий метод измерения автокорреляционной функции принимаемой смеси сигнала, отягощенного мощным шумом, возникает возможность выделять эти слабые синусоидальные сигналы.

Еще одним примером выделения слабого, но известного сигнала из его смеси с шумом, связанного с операцией формирования взаимных корреляционных функций, может служить радиолокационная система, передающая сигнал $X(t)$. Принимаемый отраженный от цели сигнал представляет собой намного меньшую

по мощности копию сигнала $X(t)$ с задержкой, равной времени его распространения к цели и обратно. Поскольку на входе радиолокационного приемника всегда присутствует шум, результирующее принимаемое сообщение $Y(t)$ может быть представлено следующим образом:

$$Y(t) = aX(t-\tau_1) + N(t), \tag{6.36}$$

где a — постоянная, $a \ll 1$, τ_1 — суммарная задержка распространения сигнала в обе стороны, $N(t)$ — шум приемника. Обычно средняя мощность отраженного сигнала $X(t-\tau_1)$ много меньше средней мощности шума $N(t)$.

Взаимная корреляционная функция переданного сигнала и сигнала на входе приемника равна

$$R_{XY}(\tau) = E[X(t)Y(t+\tau)] =$$
$$= E[aX(t)X(t+\tau-\tau_1) + X(t)N(t+\tau)] =$$
$$= aR_X(\tau-\tau_1) + R_{XN}(\tau). \tag{6.37}$$

Поскольку сигнал и шум статистически независимы и в данном случае имеют нулевые математические ожидания, взаимная корреляционная функция для $X(t)$ и $N(t)$ равна нулю при всех τ. Следовательно, (6.37) преобразуется к виду

$$R_{XY}(\tau) = aR_X(\tau-\tau_1). \tag{6.38}$$

Если вспомнить, что максимум автокорреляционных функций приходится на начало отсчета времени, станет ясно, что при подстройке τ таким образом, чтобы измеряемое значение $R_{XY}(\tau)$ стало максимальным, можно получить $\tau = \tau_1$, и это значение определяет расстояние до цели.

В некоторых случаях, касающихся исследования двух случайных процессов, можно наблюдать либо их сумму, либо разность, но не каждый процесс в отдельности. При этом взаимная корреляционная функция для суммы и разности может представлять интерес как средство получения какой-либо информации об этих процессах. Предположим, например, что имеются два процесса, описываемые соотношениями

$$U(t) = X(t) + Y(t), \tag{6.39}$$

$$V(t) = X(t) - Y(t), \tag{6.40}$$

где случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ не обязательно должны быть статистически независимы или иметь нулевые математические ожидания. Взаимная корреляционная функция для $U(t)$ и $V(t)$ имеет вид

$$R_{UV}(\tau) = E[U(t)V(t+\tau)] = E\{[X(t) +$$
$$+ Y(t)][X(t+\tau) - Y(t+\tau)]\} = E[X(t)X(t+\tau) +$$
$$+ Y(t)X(t+\tau) - X(t)Y(t+\tau) - Y(t)Y(t+\tau)]. \tag{6.41}$$

Каждое математическое ожидание в (6.41) может интерпретироваться как автокорреляционная или взаимная корреляционная функции. Следовательно,

$$R_{UV}(\tau) = R_X(\tau) + R_{YX}(\tau) - R_{XY}(\tau) - R_Y(\tau). \qquad (6.42)$$

По аналогии читатель может легко убедиться, что вторая взаимная корреляционная функция есть

$$R_{VU}(\tau) = R_X(\tau) - R_{YX}(\tau) + R_{XY}(\tau) - R_Y(\tau). \qquad (6.43)$$

Если $X(t)$ и $Y(t)$ — центрированные и статистически независимые процессы, то обе взаимные корреляционные функции совпадают:

$$R_{UV}(\tau) = R_{VU}(\tau) = R_X(\tau) - R_Y(\tau). \qquad (6.44)$$

На практике измерение взаимных корреляционных функций может проводиться по методике, во многом схожей с той, которая применялась при измерении автокорреляционных функций, и описанной в разд. 6.4. Однако количество выборок, необходимых для получения заданной дисперсии оценочного значения взаимной корреляционной функции, много больше числа выборок, требующегося для определения автокорреляционной функции.

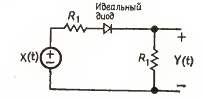
Упражнение 6.8.1. Реализации случайного процесса $X(t)$ описываются выражением $x(t) = A$, где A — случайная величина с математическим ожиданием, равным 10, и дисперсией, равной 25. Эти реализации могут наблюдаться только в присутствии не связанного с данным случайным процессом шума $N(t)$, имеющего автокорреляционную функцию $R_N(\tau) = 100 \exp(-10|\tau|)$.

а) Найдите автокорреляционную функцию суммы этих процессов.

б) Если автокорреляционная фукция этой суммы существует, найдите такое τ, при котором значение данной автокорреляционной функции находится в пределах 1 % ее значения при $\tau = \infty$.

Ответы: 0,439; $125 + 100 \exp(-10|\tau|)$.

Упражнение 6.8.2. Реализации $x(t)$ случайного бинарного процесса $X(t)$, аналогичного описанному в разд. 6.2, имеют амплитуды ± 10 и $t_a = 0{,}01$. Этот сигнал приложен к однополупериодному выпрямителю, схема которого показана ниже. Определите:



а) автокорреляционную функцию $R_Y(\tau)$ выходного сигнала,

б) взаимную корреляционную функцию $R_{XY}(\tau)$,

в) взаимную корреляционную функцию $R_{YX}(\tau)$.

Ответы: $25 + 25(1 - |\tau|/0{,}01)$; $50(1 - |\tau|)$.

6.9. Корреляционные матрицы выборочных функций

До сих пор обсуждение корреляции было сосредоточено только на двух случайных величинах. Таким образом, корреляционные функции стационарных процессов можно представить как функции одной переменной τ. Тем не менее на практике нередко приходится иметь дело с большим числом случайных величин, поэтому необходимо разработать удобный метод представления большого числа возникающих при этом автокорреляционных и взаимных корреляционных функций. Векторные обозначения обеспечивают удобный способ представления пространства случайных событий, а произведение векторов, требующихся для получения корреляционных отношений, представляется в виде матрицы. Таким образом, важно обсудить ситуации, когда векторное представление является полезным, и описать некоторые свойства корреляционных матриц. Например, векторное представление оказывается полезным при описании сигнала, когда временная функция периодически дискретизируется в некоторые моменты времени. Пусть необходимо принимать во внимание только конечное число, скажем N, таких выборок. Тогда значение каждой выборки может стать компонентой $(N \times 1)$ вектора. Следовательно, если моменты времени, в которые происходит дискретизация, обозначить t_1, t_2, ..., t_N, вектор, представляющий случайную временную функцию $X(t)$, может быть представлен в виде

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot \\ X(t_N) \end{bmatrix}.$$

Каждая компонента вектора X является случайной величиной.

Теперь можно определить корреляционную матрицу размером $(N \times N)$, которая описывает корреляцию между каждой парой случайных величин $X(t_i)$, $X(t_j)$, $i, j = \overline{1, N}$:

$$\mathbf{R_X} = E[\mathbf{X}\mathbf{X}^T] =$$

$$= E\begin{bmatrix} X(t_1)X(t_1) & X(t_1)X(t_2) & \cdots & X(t_1)X(t_N) \\ X(t_2)X(t_1) & X(t_2)X(t_2) & \cdots & X(t_2)X(t_N) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdots & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ X(t_N)X(t_1) & X(t_N)X(t_2) & \cdots & X(t_N)X(t_N) \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{X}^T$ — транспонированная матрица $\mathbf{X}$. Если выполнить усреднение каждого случайного элемента этой матрицы, то получим значение $\mathbf{R_X}(t_i, t_j)$ автокорреляционной функции случайного

процесса $X(t)$, из которого была образована указанная выборка. Таким образом,

$$\mathbf{R_X} = \begin{bmatrix} R_X(t_1, t_1) & R_X(t_1, t_2) & \dots & R_X(t_1, t_N) \\ R_X(t_2, t_1) & R_X(t_2, t_2) & \dots & R_X(t_2, t_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_X(t_N, t_1) & R_X(t_N, t_2) & \dots & R_X(t_N, t_N) \end{bmatrix}, \quad (6.45)$$

где $R_X(t_i, t_j) = E[X(t_i) X(t_j)]$.

Когда случайный процесс $X(t)$ является стационарным в широком смысле, все компоненты матрицы $\mathbf{R_X}$ становятся функциями только временного интервала. Пусть промежуток времени Δt между моментами t_{i+1} и t_i выборок $X(t_{i+1})$ и $X(t_i)$ равен $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, при этом

$$t_2 = t_1 + \Delta t,$$

$$t_3 = t_1 + 2\Delta t,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$t_N = t_1 + (N-1)\Delta t,$$

$$\mathbf{R_X} = \begin{bmatrix} R_X[0] & R_X[\Delta t] & \dots & R_X[(N-1)\Delta t] \\ R_X[\Delta t] & R_X[0] & \dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ R_X[(N-1)\Delta t] & \dots & \dots & R_X[0] \end{bmatrix}. \quad (6.46)$$

При написании этой матрицы было использовано свойство симметрии автокорреляционной функции: $R_X[i\,\Delta t] = R_X[-i\,\Delta t]$. Учтите, что вследствие симметрии $\mathbf{R_X}$ — симметричная матрица (даже если процесс нестационарный) и ее главная диагональ (и все ей параллельные) содержат идентичные элементы.

Хотя свойства матрицы $\mathbf{R_X}$ логически вытекают из вышеприведенных определений, такой путь построения корреляционной матрицы случайного вектора, состоящего из выборок, не является общепринятым. Более широко распространен метод получения *ковариационной матрицы*, содержащей дисперсии и ковариации случайных величин. В общем случае ковариация между двумя случайными величинами определяется как

$$E\{[X(t_i) - \overline{X}(t_i)][X(t_j) - \overline{X}(t_j)]\} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}, \quad (6.47)^*)$$

где $\overline{X}(t_i)$ — математическое ожидание случайной величины $X(t_i)$; $\overline{X}(t_j)$ — математическое ожидание $X(t_j)$; σ_i^2 — дисперсия слу-

*) В ряде публикаций функцию (6.47) называют *корреляционной* и обозначают $R_X(t_i, t_j)$ — *Прим. ред.*

чайной величины $X(t_i)$; σ_j^2 — дисперсия $X(t_j)$; ρ_{ij} — нормированный коэффициент ковариации между $X(t_i)$ и $X(t_j)$, причем $\rho_{ij} = 1$ при $i = j$. Ковариационная матрица определяется так:

$$\mathbf{\Lambda_X} = E\,[(\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}})(\mathbf{X}^T - \overline{\mathbf{X}}^T)], \tag{6.48}$$

где $\overline{\mathbf{X}}$ — математическое ожидание матрицы $\mathbf{X}$. Из определения ковариационной зависимости непосредственно следует

$$\mathbf{\Lambda_X} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho_{12} & \dots & \sigma_1\sigma_{N1}\rho_N \\ \sigma_2\sigma_1\rho_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_2\sigma_N\rho_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_N\sigma_1\rho_{N1} & \sigma_N\sigma_2\rho_{N2} & \dots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}. \tag{6.49}$$

При построении этой матрицы учтено, что $\rho_{ii} = 1$ при $i = 1, 2, \dots, N$. Обобщая (6.49), легко показать, что

$$\mathbf{\Lambda_X} = \mathbf{R_X} - \overline{\mathbf{X}}\,\overline{\mathbf{X}}^T. \tag{6.50}$$

Если случайный процесс центрирован, то $\mathbf{\Lambda_X} = \mathbf{R_X}$.

Понятие ковариационной матрицы пригодно как для стационарных, так и нестационарных случайных процессов. Однако для случайного процесса, стационарного в широком смысле, все дисперсии и корреляционные коэффициенты на любой диагонали одинаковы. Следовательно,

$$\sigma_i^2 = \sigma_j^2 = \sigma^2, \quad i, j = 1, 2, \dots, N,$$
$$\rho_{ij} = \rho_{|i-j|}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N,$$
$$\mathbf{\Lambda_X} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{N-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{N-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \rho_1 & \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \rho_1 \\ \rho_{N-1} & & & \rho_1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6.51}$$

Такая матрица называется *матрицей Теплица*.

Для иллюстрации рассмотрим некоторый стационарный случайный процесс $X(t)$, автокорреляционная функция которого равна

$$R_X(\tau) = 10\exp(-|\tau|) + 9. \tag{6.52}$$

Для упрощения предположим, что следует учитывать три случайные величины, разделенные интервалом $\Delta t = 1$, т. е. $N = 3$, $\Delta t = 1$. Расчет автокорреляционной функции по формуле (6.52)

для $\tau = 0$, 1 и 2 дает значения, необходимые для составления корреляционной матрицы. Следовательно, ее вид таков

$$\mathbf{R_X} = \begin{bmatrix} 19 & 12{,}68 & 10{,}35 \\ 12{,}68 & 19 & 12{,}68 \\ 10{,}35 & 12{,}68 & 19 \end{bmatrix}.$$

Поскольку дисперсия этого процесса равна 10, а его математическое ожидание $\overline{\mathbf{X}} = \pm 3$, ковариационная матрица имеет вид

$$\mathbf{\Lambda_X} = 10 \begin{bmatrix} 1 & 0{,}368 & 0{,}135 \\ 0{,}368 & 1 & 0{,}368 \\ 0{,}135 & 0{,}368 & 1 \end{bmatrix}.$$

Другая ситуация, в которой удобно использование векторных обозначений, возникает тогда, когда случайные величины выбираются из различных случайных процессов. При этом вектор, представляющий все указанные величины, может быть записан следующим образом:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \cdots \\ X_N(t) \end{bmatrix}.$$

Теперь корреляционная матрица определяется так:

$$\mathbf{R_X}(\tau) = E[\mathbf{X}(t)\,\mathbf{X}^T(t+\tau)] = \begin{bmatrix} R_1(\tau) & R_{12}(\tau) & R_{1N}(\tau) \\ R_{21}(\tau) & R_2(\tau) & R_{2N}(\tau) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{N1}(\tau) & R_{N2}(\tau) & R_N(\tau) \end{bmatrix}, \quad (6.53)$$

где

$$R_i(\tau) = E[X_i(t)\,X_i(t+\tau)],$$

$$R_{ij}(\tau) = E[X_i(t)\,X_j(t+\tau)].$$

Обратите внимание, что в этом случае элементы корреляционной матрицы представляют собой функции от τ, а не числа, как в случае корреляционной матрицы, составленной для выборок, взятых из одного и того же случайного процесса. Ситуации, в которых может возникнуть необходимость в такой корреляционной матрице, связаны с использованием антенных решеток или набора сейсмических детекторов. В таких системах шумовые сигналы в каждом элементе антенны или сейсмического детектора могут принадлежать к различным, но коррелированным случайным процессам.

Прежде чем закончить рассмотрение ковариационных матриц, стоит отметить важную роль, которую они играют при определении совместной плотности вероятностей для N случайных величин, принадлежащих гауссовскому процессу. Выше отмечалось, что гауссовский процесс — один из немногих, для которых можно определить совместную плотность распределения вероятностей при любом числе случайных величин. Определение этой совместной плотности вероятностей выходит за рамки настоящего обсуждения, но можно показать, что она равна

$$f(x) = f[x(t_1),\ x(t_2),\ \ldots,\ x(t_N)] =$$
$$= [(2\pi)^{N/2} |\Lambda_X|^{1/2}]^{-1} \exp\left[-{}^1/_2 (\mathbf{x}^T - \bar{\mathbf{x}}^T) \Lambda^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})\right], \quad (6.54)$$

где $|\Lambda_X|$ — детерминант матрицы Λ_X, а Λ_X^{-1} — обратная ей матрица.

Упражнение 6.9.1. Автокорреляционная функция случайного процесса $X(t)$ имеет вид

$$R_X(\tau) = 10 \exp(-|\tau|) \cos^2 \tau.$$

Напишите корреляционную матрицу для четырех случайных величин в моменты времени, разделенные интервалом $\Delta t = 0{,}5$ с.

Ответ: Элементы первой строки корреляционной матрицы 3,677, 2,228, 10,0, 6,064.

Упражнение 6.9.2. Ковариационная матрица стационарного случайного процесса $X(t)$ имеет вид

$$\Lambda_X = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}6 & 0{,}4 & - \\ - & 1 & 0{,}6 & - \\ 0{,}4 & 0{,}6 & - & 0{,}6 \\ 0{,}2 & - & - & 1 \end{bmatrix}.$$

Заполните пропуски в матрице.

Ответ: 1, 0,6, 0,6, 0,2, 0,4.

ЗАДАЧИ

6.1.1. Автокорреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$ имеет вид $R_X(\tau) = 5 \exp[-5|\tau|]$. Другой случайный процесс определяется как

$$Y(t) = X(t) + bX(t - 0{,}1).$$

а) Найдите значение b, при котором средний квадрат случайного процесса $Y(t)$ минимален.

б) Найдите минимум среднего квадрата случайного процесса $Y(t)$.

в) Для $|b| \leqslant 1$ найдите максимальное значение среднего квадрата случайного процесса $Y(t)$.

6.1.2. Для каждой из нижеприведенных автокорреляционных функций укажите, может ли процесс, которому соответствует данная функция, быть стационарным в широком смысле.

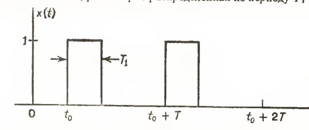
а) $R_X(t_1, t_2) = \exp(t_1 - t_2)$,

б) $R_X(t_1, t_2) = \cos t_1 \cos t_2 + \sin t_1 \sin t_2$,

в) $R_X(t_1, t_2) = \exp(t_1^2 - t_2^2)$.

г) $R_X(t_1, t_2) = (\sin t_1 \cos t_2 - \cos t_1 \sin t_2)/(t_1 - t_2)$.

6.2.1. Рассмотрите стационарный случайный процесс $X(t)$, реализация $x(t)$ которого представлена на рисунке. Прямоугольный импульс единичной амплитуды длительностью T_1 может с одинаковой вероятностью появиться или не появиться в равноотстоящие друг от друга моменты времени $t_0 \pm nT$, причем появление импульса в каком-либо интервале $[t_0 + (n-1)T, (t_0 + nT)]$ не зависит от его существования на любом из предшествующих интервалов. Момент t_0 — случайная величина, равномерно распределенная по периоду T, и $T_1 \leqslant T/2$.



а) Найдите математическое ожидание и средний квадрат случайного процесса $X(t)$.

б) Найдите автокорреляционную функцию этого процесса.

6.2.2. Определите временную автокорреляционную функцию реализации из задачи 6.2.1.

6.2.3. Пусть реализации стационарного случайного процесса $X(t)$ определяются формулой

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n g(t - t_0 - nT),$$

где A_n — независимые случайные величины, с равной вероятностью принимающие значения $+1$ или -1, а t_0 — случайная величина, равномерно распределенная по периоду T. Определите функцию

$$G(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, g(t + \tau)\, dt$$

и выразите через нее автокорреляционную функцию процесса $X(t)$.

6.3.1. Какие из приведенных на рисунке функций не могут быть автокорреляционными функциями? Объясните, почему.

6.3.2. Реализации случайного процесса $X(t)$ описываются как $x(t) = Y \cos(\omega_0 t + \theta)$, где Y, ω_0 и θ — статистически независимые случайные величины. Пусть математическое ожидание Y равно 3, дисперсия $\sigma^2 = 9$, θ — равномерно распределено между $-\pi$ и π, а ω_0 — между -6 и $+6$.

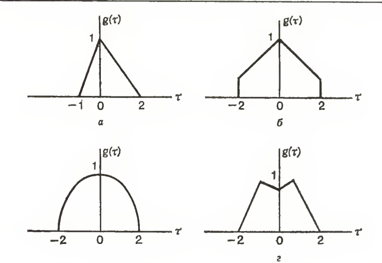
а) Стационарен ли этот случайный процесс? Является ли он эргодическим?

б) Определите математическое ожидание и средний квадрат этого процесса.

в) Определите автокорреляционную функцию процесса $X(t)$.

6.3.3. Автокорреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$ имеет вид

$$R_X(\tau) = 100 \exp(-\tau^2) \cos 2\pi\tau + 10 \cos 6\pi\tau + 36.$$



а) Определите математическое ожидание, средний квадрат и дисперсию этого процесса.

б) Какие дискретные частотные компоненты присутствуют в этом процессе?

в) Найдите минимальное τ, при котором случайные величины $X = X(t)$ и $X_\tau = X(t+\tau)$ некоррелированы.

6.3.4. Пусть функция от τ имеет вид

$$V(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|/2 & \text{при } |\tau| \leqslant T, \\ 0 & \text{при } |\tau| > T. \end{cases}$$

Выполните преобразование Фурье для этой функции и докажите, что результатом этого является автокорреляционная функция, реальная только при $T = 2$.

6.4.1. Выборки $x_k = x(t_k)$ стационарного случайного процесса $X(t)$ производятся в моменты времени t_k, разделенные интервалом 0,01 с. Значения выборок следующие:

k	x_k	k	x_k	k	x_k
0	0,19	7	—1,24	14	1,45
1	0,29	8	—1,88	15	—0,82
2	1,44	9	—0,31	16	—0,25
3	0,83	10	1,18	17	0,23
4	—0,01	11	1,70	18	—0,91
5	—1,23	12	0,57	19	—0,19
6	—1,47	13	0,95	20	0,24

а) Найдите математическое ожидание реализации.

б) Найдите оценочную автокорреляционную функцию $\widehat{R}(0{,}01n)$ при $n = 0, 1, 2, 3$, используя уравнение (6.15).

в) Решите задачу п. б, используя уравнение (6.16).

6.4.2. а) Для данных задачи 6.4.1 определите верхний предел дисперсии оценочной автокорреляционной функции, пользуясь приближенными значениями, найденными при решении 6.4.1б.

б) Решите задачу п. а, пользуясь значениями, найденными при решении задачи 6.4.1 в.

6.4.3. Пусть действительная автокорреляционная функция случайного процесса, которому соответствуют данные задачи 6.4.1, имеет вид

$$R(\tau) = \begin{cases} A\,(1-|\tau|/T) & \text{при } |\tau| \leqslant T, \\ 0 & \text{при других } \tau. \end{cases}$$

а) По критерию минимального среднего квадратического отклонения (см. разд. 4.6) найдите A и T, обеспечивающие наилучшее соответствие этой функции оценочной автокорреляционной функции, значения которой вычислены в задаче 6.4.1 б.

б) Используя результаты п. а и уравнение (6.18), определите еще одно ограничение сверху приближенного значения автокорреляционной функции. Ср. с решением задачи 6.4.2 а.

6.4.4. Автокорреляционная функция случайного процесса $X(t)$ имеет вид

$$R_X(\tau) = 10 \exp[-5\,|\tau|] \cos 20\tau.$$

Считая, что выборки из процесса производятся с интервалом 0,01 с, определите объем выборки, необходимый, чтобы оценить автокорреляционную функцию со средним квадратом отклонения, не превышающим 1 % дисперсии этого процесса.

6.5.1. Пусть реализация случайного процесса имеет вид, представленный на рис. 6.4, *а*, и пусть интервалы между переключениями суть статистически независимые экспоненциально распределенные случайные величины (см. разд. 2.7). Покажите, что автокорреляционная функция этого процесса имеет вид двусторонней экспоненты, показанной на рис. 6.4, *б*.

6.5.2. Полагая, что значения реализации $x(t)$ случайного процесса $X(t)$ из задачи 6.5.1 колеблются между 0 и 2 A, а не $\pm A$, как указано на рис. 6.4, *а*, определите автокорреляционную функцию такого процесса.

6.5.3. Определите математическое ожидание и дисперсию случайных процессов со следующими автокорреляционными функциями:

а) $10 \exp[-\tau^2]$, б) $10 \exp[-\tau^2] \cos 2\pi\tau^2$,

в) $10(\tau^2+8)/(\tau^2+4)$.

6.5.4. Пусть автокорреляционная функция случайного процесса имеет вид

$$R_X(\tau) = 10 \exp[-2\,|\tau|] - 5 \exp[-4\,|\tau|].$$

а) Определите математическое ожидание и дисперсию этого процесса.

б) Дифференцируем ли этот процесс и почему?

6.7.1. Пусть автокорреляционные функции двух независимых стационарных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ соответственно равны

$$R_X(\tau) = 25 \exp[-10\,|\tau|] \cos 100\pi\tau,$$

$$R_Y(\tau) = 16 (\sin 50\pi\tau)/(50\pi\tau).$$

Определите автокорреляционную функцию

а) процесса $X(t) + Y(t)$,

б) процесса $X(t) - Y(t)$.

в) Вычислите взаимные корреляционные функции процессов, указанных в п.п. а и б.

г) Определите автокорреляционную функцию процесса $X(t)\,Y(t)$.

6.7.2. Найдите возможные максимальные значения взаимных корреляционных функций двух случайных процессов из задачи 6.7.1, используя неравен-

ство (6.29). Сравните предельное значение, даваемое (6.29), с реальными максимальными значениями этих взаимных корреляционных функций.

6.7.3. Автокорреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$ имеет вид $R_X(\tau) = (\sin \tau/\tau)$. Определите

а) $R_{X\dot{X}}(\tau)$, б) $R_{\dot{X}}(\tau)$.

6.7.4. Взаимная корреляционная функция двух стационарных случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ имеет вид

$$R_{XY}(\tau) = 16 \exp[-(\tau - 1)^2].$$

Найдите взаимную корреляционную функцию для производной случайного процесса $X(t)$ и случайного процесса $Y(t)$, т. е. определите $R_{\dot{X}Y}(\tau)$.

6.8.1. Гармонический сигнал описывается выражением

$$X(t) = 0{,}01 \sin(100t + \theta),$$

где θ — случайная величина Равномерно распределенная между $-\pi$ и π. Этот сигнал наблюдается на фоне независимого от него случайного шума, автокорреляционная функция которого равна

$$R_N(\tau) = 10 \exp[-100|\tau|].$$

а) Определите значение автокорреляционной функции аддитивной смеси сигнала с шумом при $\tau = 0$.

б) Определите наименьшее τ, для которого пиковое значение автокорреляционной функции сигнала в 10 раз превышает автокорреляционную функцию шума.

6.8.2. Один из способов выделения синусоидального сигнала из смеси с шумом связан с использованием коррелятора. В этом устройстве напряжение входной смеси сигнала с шумом умножается на напряжение местного опорного генератора, которое имеет такую же форму, как и измеряемый сигнал, а затем математическое ожидание полученного произведения выделяется фильтром нижних частот. Предположим, что напряжение смеси сигнала и шума из задачи 6.8.1 умножается на опорный сигнал, имеющий вид

$$r(t) = 10 \cos(100t + \varphi).$$

Произведение равно

$$Z(t) = r(t)\, X(t) + r(t)\, N(t).$$

а) Найдите математическое ожидание случайного процесса $Z(t)$ при условии, что φ предполагается фиксированным, но заранее неизвестным.

б) Для какого φ ожидаемое значение $Z(t)$ является наибольшим?

6.8.3. На передней и задней осях подвижного объекта смонтированы датчики вибраций, предназначенные для измерения случайных колебаний, вызванных неровностями поверхности дороги. Напряжение сигнала, поступающего от датчика, установленного на передней оси, можно представить в виде

$$f(t) = s(t) + n_1(t),$$

где сигнал $s(t)$ и шум $n_1(t)$ являются реализацями соответствующих независимых случайных процессов. Сигнал датчика, расположенного на задней оси, описывается выражением

$$(t) = s(t - \tau_1) + n_2(t),$$

где $n_2(t)$ — шум, не связанный ни с $s(t)$, ни с $n_1(t)$. Все указанные процессы являются центрированными. Запаздывание τ_1 зависит от разнесения датчиков и скорости подвижного объекта.

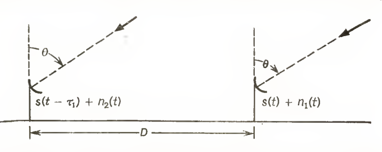
а) Получите соотношение между запаздыванием τ_1 и скоростью движения объекта v, полагая, что датчики разнесены на 5 м.

б) Нарисуйте структурную схему устройства, пригодного для измерения скорости подвижного объекта в диапазоне от 5 до 50 м/с. Определите максимальное и минимальное значения задержки, необходимые при использовании аналогового коррелятора.

в) Почему существует минимальное значение скорости, которое можно измерить таким способом?

г) Какова максимальная скорость, которую можно измерить цифровым коррелятором, если входные сигналы дискретизируются с частотой 12 Гц?

6.8.4. Угловые размеры звезды можно измерить путем формирования взаимных корреляционных функций сигналов, поступающих с выходов двух сильно разнесенных антенных систем, и измерения временной задержки, соответствую-



щей максимуму взаимной корреляционной функции. Геометрия системы показана на рисунке. В такой системе номинальное расстояние между антеннами равно 500 м, а среднее квадратическое его отклонение — 0,01 м. Требуется измерить угол θ со средним квадратическим отклонением не более 0,001 рад для всех θ, лежащих в интервале от 0 до 1,4 рад. Найдите ограничение сверху, накладываемое на среднее квадратическое отклонение измеряемой задержки для удовлетворения поставленному условию. *Указание*: для линеаризации соотношения используйте полный дифференциал.

6.9.1. Автокорреляционная функция стационарного случайного процесса равна

$$R_X(\tau) = 36 \exp\,[-2\,|\tau|] \cos \pi\tau.$$

Сам процесс периодически дискретизируется с интервалом 0,5 с. Напишите выражение ковариационной матрицы для четырех последовательно взятых выборок из этого процесса.

6.9.2. Случайный вектор гауссовского распределения имеет вид

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}.$$

Его ковариационная матрица равна

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Определите математическое ожидание $E\,[\mathbf{X}^T \Lambda^{-1} \mathbf{X}]$.

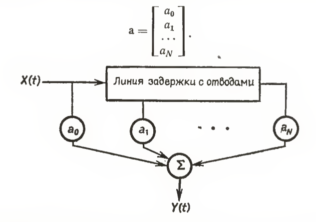
6.9.3. Трансверсальный фильтр представляет собой линию задержки с отводами; сигналы с различных отводов суммируются в определенном весовом соотношении, как показано на рисунке.

Если задержку между соседними выводами обозначить Δt, то сигналы на отводах линии задержки можно описать вектором

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ X(t-\Delta t) \\ \cdots \\ X(t-N\Delta t) \end{bmatrix}.$$

Аналогично, веса, соответствующие различным отводам, могут быть представлены вектором

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_N \end{bmatrix}.$$



а) Напишите выражение для сигнала $Y(t)$ на выходе трансверсального фильтра, пользуясь обозначениями векторов $\mathbf{X}(t)$ и $\mathbf{a}$.

б) Пусть $X(t)$ — стационарный случайный процесс с автокорреляционной функцией $R_X(\tau)$. Напишите выражение для автокорреляционной функции $R_Y(\tau)$ выходного сигнала $Y(t)$.

6.9.4. Пусть автокорреляционная функция сигнала, действующего на входе трансверсального фильтра из задачи 6.9.3, имеет вид

$$R_X(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|/\Delta t & \text{при } |\tau| \leqslant \Delta t, \\ 0 & \text{при других } \tau. \end{cases}$$

а) Полагая, что трансверсальный фильтр имеет 4 вывода (т. е. $N = 3$) и вес каждого вывода $a_i = 1$ для всех i, определите и изобразите автокорреляционную функцию выходного сигнала.

б) Повторите задачу п. а, полагая вес $a_i = 4 - i$, где $i = 0, 1, 2, 3$.

ЛИТЕРАТУРА

См. литературу к гл. 1. Особый интерес по теме этой главы представляют книги [3, 6, 8].

Глава 7

Спектральная плотность

7.1. Введение

При анализе различных линейных систем широко применяются преобразования Фурье и Лапласа, позволяющие достаточно просто выполнять необходимые вычисления. Основная причина данного упрощения заключается в замене процедуры свертки, используемой при анализе систем во временной области, на обычную операцию умножения частотных характеристик и функций, используемых при анализе в частотной области.

Ввиду широкого использования методов анализа в частотной области возникает естественный вопрос: рациональны ли эти методы при наличии на входе системы случайных воздействий? Ответ на этот вопрос оказывается положительным с той поправкой, что соответствующие соотношения должны быть несколько видоизменены, а их использование должно быть достаточно корректным с математической точки зрения. Тем не менее даже с учетом этих поправок корректное применение методов частотного анализа при воздействии на линейные системы случайных сигналов позволяет получить те же преимущества, что и для случая воздействия детерминированных сигналов.

Прежде всего целесообразно кратко рассмотреть представление в частотной области неслучайных функций времени. Наиболее естественным представлением этого вида является преобразование Фурье, благодаря которому вводится понятие частотного спектра. При этом преобразование Фурье некоторой неслучайной функции времени $f(t)$ определяется соотношением

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[-j\omega t]\, dt. \tag{7.1}$$

Если, например, $f(t)$ представляет собой изменяющееся во времени напряжение, то $F(\omega)$ имеет размерность [В/(рад/с)] и определяет относительные амплитуды и фазы незатухающих гармонических составляющих, суммирование которых позволяет получить исходную функцию $f(t)$. Таким образом, амплитудные соотношения в преобразовании Фурье характеризуют *плотность распреде-*

ления амплитуд по частоте и поэтому определяют распределение энергии по спектру.

Представляется естественным применить ту же самую математическую операцию для *случайных* сигналов и использовать преобразование Фурье для определенной реализации $\dot{x}(t)$ случайного процесса

$$F_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp[-j\omega t]\, dt$$

в качестве представления случайного процесса в частотной области. К сожалению, такая процедура оказывается невозможной в силу по меньшей мере двух причин. Во-первых, результат преобразования Фурье оказывается случайной величиной относительно ансамбля реализаций (для любой фиксированной частоты ω), так как преобразование Фурье дает разные значения для каждой из реализаций случайного процесса $x(t)$. Следовательно, преобразование Фурье в таком виде может быть частотным представлением не самого случайного процесса, а лишь его отдельных реализаций. Тем не менее это представление могло бы быть рациональным за счет определения отдельных результатов применения преобразования Фурье и усреднения их по множеству реализаций. Однако существует вторая, более важная причина нерезультативности рассматриваемого подхода. Она заключается в том, что по крайней мере для стационарных процессов функция $F_x(\omega)$ почти никогда не существует! В самом деле, для существования преобразования Фурье какой-либо функции времени эта функция должна удовлетворять ряду условий, одним из которых является ее абсолютная интегрируемость, т. е. абсолютная сходимость интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty. \tag{7.2}$$

Это условие никогда не удовлетворяется для любой не равной нулю реализации стационарного в широком смысле случайного процесса. В этом случае преобразование Фурье в общепринятой форме никогда не будет существовать, хотя в принципе оно может существовать для функций обобщенного вида, в частности, для импульсного сигнала.

Теперь, когда мы установили, что преобразование Фурье не позволяет получить представление случайного процесса в частотной области, логично попытаться использовать преобразование Лапласа, которое по определению обладает свойством абсолютной сходимости. Ясно, что обычное одностороннее преобразование Лапласа, справедливое для функции $f(t)$ при $t \geqslant 0$, неприменимо к стационарным в широком смысле случайным процессам. Однако

это ограничение вполне преодолимо благодаря возможности использования двустороннего (и для положительных, и для отрицательных t) преобразования Лапласа. Тогда преобразование Лапласа будет существовать почти для всех реализаций стационарного случайного процесса.

Однако данный подход оказывается не столь многообещающим, как это представляется на первый взгляд, так как просто переводит проблему существования в область обратного преобразования. Исследование данных вопросов требует знания теории функций комплексной переменной, что выходит за рамки рассматриваемого материала. Поэтому наиболее приемлемым и простым с математической точки зрения подходом является все же применение преобразования Фурье, но с использованием ограничений, которые обеспечивают его сходимость. Однако даже в этом случае не всегда удается строго обосновать правомерность соответствующих операций, ряд из которых должен восприниматься чисто умозрительно.

7.2. Связь спектральной плотности с преобразованием Фурье

Для использования преобразования Фурье необходимо видоизменить реализации стационарного случайного процесса таким образом, чтобы это преобразование существовало для каждой реализации. Есть много способов осуществления такой процедуры, но наиболее простым из них является введение нового процесса $X_T(t)$ ограниченной длительности, определенного на временном интервале $|t| \leqslant T \leqslant \infty$:

$$X_T(t) = \begin{cases} X(t), & |t| \leqslant T < \infty, \\ 0, & |t| > T. \end{cases} \tag{7.3}$$

Следует отметить, что этот *усеченный* случайный процесс будет удовлетворять условию (7.2) при ограниченном значении T при условии, что стационарный процесс $X(t)$, из которого формируется $X_T(t)$, имеет ограниченную дисперсию. Следовательно, для $X_T(t)$ будет существовать преобразование Фурье. В действительности $X_T(t)$ будет удовлетворять более строгому требованию интегрируемости в среднеквадратическом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X_T(t)|^2 \, dt < \infty. \tag{7.4}$$

Это условие будет использоваться в дальнейшем изложении.

Преобразование Фурье для функции $X_T(t)$ имеет вид:

$$F_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X_T(t) \exp[-j\omega t] \, dt, \quad T < \infty. \tag{7.5}$$

В конечном итоге следует перейти к пределу $T \to \infty$. Целью дальнейшего рассмотрения является доказательство того, что математическое ожидание величины $|F_X(\omega)|^2$ существует в этом пределе, даже если не существует $F_X(\omega)$ для какой-либо реализации случайного процесса. Первый этап этого доказательства состоит в применении теоремы, или равенства Парсеваля к функциям $X_T(t)$ и $F_X(\omega)$ [1]). Тогда с учетом того, что $X_T(t) = 0$ при $|t| < T$, получим

$$\int_{-T}^{T} X_T^2(t)\,dt = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} |F_X(\omega)|^2\,d\omega. \tag{7.6}$$

Следует заметить, что $|F_X(\omega)|^2 = F_X(\omega)\,F_X(-\omega)$, так как $F_X(-\omega)$ — величина, комплексно-сопряженная с $F_T(\omega)$ для $X_T(t)$, являющейся вещественной функцией времени.

Поскольку искомая величина характеризует распределение средней мощности по частоте, на следующем этапе необходимо усреднить обе части (7.6) на интервале времени длительностью $2T$. Разделив обе части выражения (7.6) на $2T$, получим

$$(1/2T) \int_{-T}^{T} X_T^2(t)\,dt = (1/4\pi T) \int_{-\infty}^{\infty} |F_X(\omega)|^2\,d\omega. \tag{7.7}$$

Очевидно, что левая часть выражения (7.7) пропорциональна средней мощности на интервале времени от $-T$ до T. Точнее, она представляет собой квадрат эффективного значения функции $X_T(t)$. Кроме того, для эргодического процесса при $T \to \infty$ эта величина приближается к значению среднего квадрата случайного процесса $X(t)$.

Однако на данном этапе еще нельзя устремить $T \to \infty$, так как $F_X(\omega)$ не существует в этом пределе. При этом необходимо напомнить, что $F_X(\omega)$ является случайной относительно ансамбля реализаций случайного процесса $X(t)$. Естественно предположить (и это может быть строго доказано), что предел математического ожидания величины $(1/T)\,|F_X(\omega)|^2$ существует, так как существует интеграл от этой «всюду положительной» функции, как это следует из (7.4). Тогда, выполнив усреднение обеих частей выра-

---

[1]) Теорема Парсеваля гласит, что если $f(t)$ и $g(t)$, являющиеся функциями времени, имеют преобразования Фурье $F(\omega)$ и $G(\omega)$ соответственно, то справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,g(t)\,dt = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,G(-\omega)\,d\omega.$$

жения (7.7), внося при этом знак математического ожидания под знак интеграла и переходя к пределу при $T \to \infty$, получим

$$E\left\{(1/2T)\int_{-T}^{T} X_T^2(t)\,dt\right\} = E\left\{(1/4\pi T)\int_{-\infty}^{\infty} |F_X(\omega)|^2\,d\omega\right\},$$

$$\lim_{T\to\infty}(1/2T)\int_{-T}^{T}\overline{X^2}\,dt = \lim_{T\to\infty}(1/4\pi T)\int_{-\infty}^{\infty} E\{|F_X(\omega)|^2\}\,d\omega, \quad (7.8)$$

$$\langle\overline{X^2}\rangle = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{E\{|F_X(\omega)|^2\}}{2T}\,d\omega.$$

Для стационарного случайного процесса усредненный по времени средний квадрат случайной функции равен самому среднему квадрату, поэтому (7.8) можно записать в виде

$$\overline{X^2} = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{E\{|F_X(\omega)|^2\}}{2T}\,d\omega. \quad (7.9)$$

Подынтегральное выражение в правой части (7.9), которое будем обозначать $S_X(\omega)$, называется *спектральной плотностью* случайного процесса

$$S_X(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{E[|F_X(\omega)|^2]}{2T}. \quad (7.10)$$

Еще раз следует напомнить, что только после выполнения операции усреднения по множеству реализаций справедлив переход к пределу $T \to \infty$. Если $X(t)$ — напряжение, то $S_X(\omega)$ имеет размерность [В²/Гц], а интеграл от $S_X(\omega)$ в соответствии с (7.9) определяет средний квадрат этого напряжения, т. е.

$$\overline{X^2} = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)\,d\omega. \quad (7.11)$$

Более наглядная физическая интерпретация спектральной плотности может быть дана путем анализа средней мощности. Если $X(t)$ — флуктуационное напряжение или ток, протекающий через резистор сопротивлением 1 Ом, то $\overline{X^2}$ есть средняя мощность, рассеиваемая этим резистором. Спектральную плотность можно интерпретировать как среднюю мощность, сосредоточенную в пределах полосы частот шириной 1 Гц при центральной частоте спектра, равной $(\omega/2\pi)$ Гц. [Отметим, что единицей измерения частоты является герц, т. е. один цикл, или одно колебание в секунду, а не радиан в секунду, что обусловлено коэффициентом

$1/2\pi$ перед интегралом в (7.11).] Вследствие того что существует однозначная взаимосвязь между спектральной плотностью и средней мощностью случайного процесса, спектральную плотность часто называют *спектром плотности мощности*.

Определенную выше спектральную плотность иногда называют *двусторонней* спектральной плотностью, так как она существует как для положительных, так и для отрицательных значений частоты ω. Ряд авторов предпочитает пользоваться понятием *односторонней* спектральной плотности, которая обычно выражается как функция аргумента $f = \omega/2\pi$ и существует только для положительных значений f. Если обозначить одностороннюю спектральную плотность через $G_X(f)$, то средний квадрат случайного процесса будет определяться выражением

$$\overline{X^2} = \int_0^\infty G_X(f)\, df. \tag{7.12}$$

Так как односторонняя спектральная плотность определена только для положительных частот, справедливо соотношение, связывающее ее с двусторонней спектральной плотностью:

$$G_X(f) = \begin{cases} 2S_X(2\pi f), & f \geqslant 0, \\ 0, & f < 0. \end{cases} \tag{7.13}$$

Хотя как односторонняя, так и двусторонняя спектральные плотности широко используются в научно-технической литературе, в интересах соблюдения логики изложения материала в дальнейшем мы будем пользоваться только понятием двусторонней спектральной плотности. Однако читатель должен помнить, что в других источниках может использоваться любое из этих двух понятий, и при этом важно знать, какое именно.

Приведенный выше анализ спектральной плотности выполнен более детально, чем это принято в рамках вводного рассмотрения. Причина этого заключается в попытке избежать трудности чисто математической трактовки, которые можно не заметить при более поверхностном анализе. Несомненно, данный подход вызывает дополнительные трудности у читателя на начальном этапе изучения спектральной плотности, но представляется, что более высокая степень строгости изложения заслуживает и дополнительных усилий в освоении материала. Более того, если даже не все аспекты рассматриваемого материала поняты достаточно глубоко, это должно натолкнуть читателя на мысль о существовании ряда менее очевидных трудностей в методах анализа в частотной области.

Другой подход к изучению и анализу спектральной плотности, определяемой через корреляционную функцию, дается в разд. 7.6. С точки зрения практического применения спектраль-

ной плотности такое определение, вероятно, является более продуктивным по сравнению с приведенным выше подходом и проще для понимания. Однако при этом не столь очевидной оказывается физическая интерпретация спектральной плотности.

Прежде чем перейти к более детальному рассмотрению свойств спектральной плотности, следует отметить, что при анализе систем спектральная плотность случайного процесса на входе системы играет ту же роль, что и соответствующее преобразование неслучайного сигнала. Основное различие заключается в том, что спектральная плотность представляет собой плотность мощности, а не плотность напряжения. Таким образом, для статистического анализа систем необходимо определить их передаточную функцию не по напряжению, а по мощности.

Упражнение 7.2.1. Стационарный случайный процесс $X(t)$ имеет двустороннюю спектральную плотность вида

$$S_X(\omega) = \begin{cases} 16\pi, & a \leqslant |\omega| \leqslant b, \\ 0 & \text{для всех других } \omega. \end{cases}$$

Определить средний квадрат значений этого процесса, если а $a = 0$ и $b = 2$, б) $a = 2$ и $b = 3$.

Ответы: 16, 32.

Упражнение 7.2.2. Стационарный случайный процесс имеет двустороннюю спектральную плотность вида

$$S_X(\omega) = 32/(\omega^2 + 16).$$

Определить:

а) среднюю мощность этого случайного процесса, рассеиваемую на резисторе сопротивлением 1 Ом,

б) среднюю мощность, рассеиваемую на резисторе сопротивлением 1 Ом, при изменении частоты ω в диапазоне от —4 до 4.

Ответы: 2, 4.

7.3. Свойства спектральной плотности

Большинство важных свойств спектральной плотности можно кратко охарактеризовать так: $S_X(\omega)$ есть вещественная, положительная, четная функция частоты ω. Из анализа преобразования Фурье известно, что его модуль — величина вещественная и положительная. Следовательно, этими же свойствами будет также обладать и математическое ожидание этой функции.

Отдельный класс спектральных плотностей, нашедших более широкое применение, нежели другие, объединяет рациональные функции, называемые так потому, что они представляют собой отношение полиномов. Так как спектральная плотность является четной функцией частоты ω, эти полиномы состоят из компонент только четных степеней ω, а именно

$$S_X(\omega) = \frac{S_0(\omega^{2n} + a_{2n-2}\omega^{2n-2} + \cdots + a_2\omega^2 + a_0)}{\omega^{2m} + b_{2m-2}\omega^{2m-2} + \cdots + b_2\omega^2 + b_0}. \qquad (7.14)$$

Если значение среднего квадрата случайного процесса $X(t)$ конечно, то в соответствии с (7.11) площадь под кривой $S_X(\omega)$ также должна быть ограниченной величиной. В данном случае необходимо, чтобы выполнялось условие $m > n$. В дальнейшем всегда будет подразумеваться выполнение этого условия, за исключением случая *белого шума*, являющегося специфическим вариантом случайного процесса. Термин «белый шум» используется для случайного процесса, спектральная плотность которого постоянна для всех ω, т. е. $S_X(\omega) = S_0$. Хотя такой процесс физически не может существовать (так как его средний квадрат равен бесконечности), он является удобной математической моделью, в значительной степени упрощающей многие вычисления, которые в ряде случаев оказываются весьма затруднительными. Обоснование правомерности и иллюстрация применения данного подхода (с использованием белого шума) более подробно приводятся ниже.

В качестве примера рациональной спектральной плотности рассмотрим функцию

$$S_X(\omega) = \frac{16(\omega^4 + 12\omega^2 + 32)}{\omega^6 + 18\omega^4 + 92\omega^2 + 120} = \frac{16(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 8)}{(\omega^2 + 2)(\omega^2 + 6)(\omega^2 + 10)}.$$

Заметим, что эта функция удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к спектральным плотностям, а именно она является вещественной, положительной и четной относительно ω. Кроме того, степень знаменателя превышает степень числителя, так что спектральная плотность стремится к нулю при $\omega \to \infty$. Следовательно, случайный процесс, описываемый этой спектральной плотностью, будет иметь конечное значение среднего квадрата. Подобная форма записи для спектральной плотности часто оказывается полезной при вычислении интеграла, необходимого для определения среднего квадрата случайного процесса. Такая процедура более подробно рассматривается в следующем разделе.

Возможно также существование спектральных плотностей, не являющихся рациональными функциями. Типичный пример этого случая — спектральная плотность вида

$$S_X(\omega) = (\sin 5\omega/5\omega)^2.$$

Как будет показано ниже, это выражение определяет спектральную плотность случайного двоичного сигнала.

Спектральные плотности данного типа непрерывны и как таковые не могут описывать случайные процессы, имеющие постоянную или периодическую компоненты. Причину этого несложно понять, если интерпретировать спектральную плотность как среднюю мощность, распределенную в пределах единичного интервала частот. Любая постоянная составляющая случайного процесса представляет собой процесс с конечной средней мощ-

ностью, сосредоточенной при $\omega = 0$ в пределах спектра нулевой ширины, так как эта составляющая имеет дискретный частотный спектр. Конечная мощность в пределах спектра нулевой ширины эквивалентна бесконечной спектральной плотности. Следовательно, в данном случае спектральная плотность будет бесконечна на нулевой частоте и конечна на любой другой, т. е. она будет содержать дельта-функцию при $\omega = 0$. Аналогичные доводы применительно к периодическим компонентам подтверждают существование дельта-функций на соответствующих дискретных частотах. Строгий вывод этих результатов будет способствовать большей доказательности этих доводов и в то же самое время будет иллюстрировать применение основного соотношения (7.10) для вычисления спектральных плотностей.

С целью получения требуемых соотношений рассмотрим стационарный случайный процесс

$$X(t) = A + B\cos(\omega_1 t + \theta), \tag{7.15}$$

где A, B и ω_1 — постоянные, а θ — случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[0, 2\pi]$, т. е.

$$f(\theta) = \begin{cases} 1/2\pi, & 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \\ 0 & \text{при других } \theta. \end{cases}$$

Преобразование Фурье усеченной реализации $X_T(t)$ равно

$$F_X(\omega) = \int_{-T}^{T} [A + B\cos(\omega_1 t + \theta)] \exp[-j\omega t]\, dt =$$

$$= A\frac{\exp[-j\omega t]}{-j\omega}\Big|_{-T}^{T} + \frac{B}{2}\frac{\exp\{j[(\omega_1 - \omega)t + \theta]\}}{j(\omega_1 - \omega)}\Big|_{-T}^{T} +$$

$$+ \frac{B}{2}\frac{\exp\{-j[(\omega_1 + \omega)t + \theta]\}}{-j(\omega_1 + \omega)}\Big|_{-T}^{T}.$$

Подстановка пределов и упрощение приводят к

$$F_X(\omega) = \frac{2A\sin\omega T}{\omega} + B\left[\frac{\exp(j\theta)\sin(\omega - \omega_1)T}{\omega - \omega_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{\exp(-j\theta)\sin(\omega + \omega_1)T}{\omega + \omega_1}\right]. \tag{7.16}$$

Квадрат модуля $F_X(\omega)$ содержит девять слагаемых, часть которых не зависит от случайной величины θ, а остальные содержат либо множитель $\exp[\pm j\theta]$, либо $\exp[\pm j2\theta]$. Ввиду того что результат усреднения всех членов, содержащих θ, окажется равным нулю, целесообразно представить квадрат модуля в сим-

волической форме, не определяя все коэффициенты. Таким образом,

$$|F_X(\omega)|^2 = \frac{4A^2 \sin^2 \omega T}{\omega^2} + B^2 \left[\frac{\sin^2(\omega-\omega_1)T}{(\omega-\omega_1)^2} + \frac{\sin^2(\omega+\omega_1)T}{(\omega+\omega_1)^2} \right] + \\ + C(\omega)\exp[j\theta] + C(-\omega)\exp[-j\theta] + D(\omega)\exp[j2\theta] + \\ + D(-\omega)\exp[-j2\theta]. \quad (7.17)$$

Рассмотрим теперь математическое ожидание какого-либо слагаемого, содержащего θ. Каждое из этих слагаемых имеет вид $G(\omega)\exp[jn\theta]$, а его математическое ожидание равно

$$E[G(\omega)\exp(jn\theta)] = G(\omega)\int_0^{2\pi}(1/2\pi)\exp[jn\theta]\,d\theta = \\ = \frac{G(\omega)}{2\pi}\frac{\exp[jn\theta]}{jn}\Bigg|_0^{2\pi} = 0, \ n = \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots . \quad (7.18)$$

Таким образом, последние четыре слагаемые в (7.17) оказываются равными нулю, а математическое ожидание принимает вид

$$E[|F_X(\omega)|^2] = 4A^2\left[\frac{\sin^2 \omega T}{\omega^2}\right] + B^2\left[\frac{\sin^2(\omega-\omega_1)T}{(\omega-\omega_1)^2} + \right. \\ \left. + \frac{\sin^2(\omega+\omega_1)T}{(\omega+\omega_1)^2}\right]. \quad (7.19)$$

В соответствии с (7.10) спектральная плотность равна

$$S_X(\omega) = \lim_{T\to\infty}\left\{2A^2T\left(\frac{\sin \omega T}{\omega T}\right)^2 + \frac{B^2T}{2}\left[\frac{\sin(\omega-\omega_1)T}{(\omega-\omega_1)T}\right]^2 + \right. \\ \left. + \frac{B^2T}{2}\left[\frac{\sin(\omega+\omega_1)T}{(\omega+\omega_1)T}\right]^2\right\}. \quad (7.20)$$

Для вычисления предела рассмотрим предельное значение множителя $\lim\limits_{T\to\infty} T(\sin \omega T/\omega T)^2$, входящего в первое слагаемое. Ясно, что этот предел равен нулю для всех ненулевых значений ω, так как $\sin^2 \omega T$ не может превышать единицу, а знаменатель возрастает по мере увеличения T. Однако при $\omega = 0$ имеем $(\sin \omega T/\omega T) = 1$, и соответствующий предел равен бесконечности. Следовательно, можем записать

$$\lim_{T\to\infty} T\left(\frac{\sin \omega T}{\omega T}\right)^2 = K\delta(\omega), \quad (7.21)$$

где K — относительная высота δ-функции, которая выше не была определена. Значение K можно найти приравниванием площадей, ограниченных функциями, стоящими в правой и левой частях **выражения** (7.21):

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} T\left(\frac{\sin \omega T}{\omega T}\right)^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} K\delta(\omega)\,d\omega. \quad (7.22)$$

Интеграл в левой части является табулированным и равен π для всех значений $T > 0$. Следовательно, предельный переход становится очевидным, и из (7.22) получаем $K = \pi$.

Аналогичная процедура может быть использована для других слагаемых соотношения (7.20). Предоставляем это читателю в качестве упражнения. Окончательный результат должен быть равен

$$S_X(\omega) = 2\pi A^2\delta(\omega) + (\pi/2)\, B^2\delta(\omega - \omega_1) + (\pi/2)\, B^2\delta(\omega + \omega_1). \tag{7.23}$$

Эта спектральная плотность изображена на рис. 7.1.

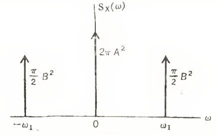


Рис. 7.1. Спектральная плотность постоянной составляющей и синусоидальной компоненты.

Представляет интерес определить площадь под кривой спектральной плотности, чтобы убедиться в том, что выражение (7.23) действительно дает значение среднего квадрата случайного процесса. В соответствии с (7.11) имеем

$$\overline{X^2} = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} [2\pi A^2\delta(\omega) + (\pi/2)\, B^2\delta(\omega - \omega_1) + $$
$$+ (\pi/2)\, B^2\delta(\omega + \omega_1)]\, d\omega = (1/2\pi)\,[2\pi A^2 + (\pi/2)\, B^2 + (\pi/2)\, B^2] =$$
$$= A^2 + B^2/2. \tag{7.24}$$

Нетрудно убедиться, что тот же самый результат может быть получен путем усреднения функции $X^2(t)$ по ансамблю реализаций.

Следующий числовой пример будет служить иллюстрацией дискретной спектральной плотности. Предположим, что имеется стационарный случайный процесс вида

$$X(t) = 5 + 10 \sin(6t + \theta_1) + 8 \cos(12t + \theta_2),$$

где θ_1 и θ_2 — независимые случайные величины, равномерно распределенные в интервале $[0, 2\pi]$. Заметим, что, так как фазы равномерно распределены в пределах 2π радиан, отсутствуют различия между синусной и косинусной составляющими, к которым применимы полученные выше результаты. Это было бы не-

правомерно, если бы фазы не были равномерно распределены в этом интервале. В силу (7.23) можем сразу записать выражение для спектральной плотности этого процесса:

$$S_X(\omega) = 2\pi 5^2 \delta(\omega) + (\pi/2)\, 10^2 \delta(\omega - 6) + (\pi/2)\, 10^2 \delta(\omega + 6) + (\pi/2)\, 8^2 \delta(\omega - 12) + (\pi/2)\, 8^2 \delta(\omega + 12) = \pi\, [50\delta(\omega) + 50\delta(\omega - 6) + 50\delta(\omega + 6) + 32\delta(\omega - 12) + 32\delta(\omega + 12)].$$

Из (7.24) нетрудно вычислить значение среднего квадрата данного случайного процесса:

$$\overline{X^2} = 5^2 + (1/2)\, 10^2 + (1/2)\, 8^2 = 107.$$

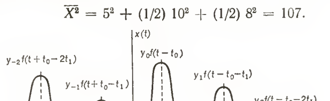
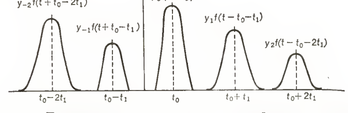



Рис. 7.2. Последовательность импульсов со случайными амплитудами.

Из приведенного примера ясно, что определение спектральной плотности и среднего квадрата случайного процесса, содержащего гармонические компоненты, представляет собой несложную процедуру.

Возможно также существование спектральных плотностей, содержащих как непрерывную, так и дискретную компоненты. Соответствующие примеры часто возникают в системах связи или в системах дискретного (прерывистого) управления в случае, если реализация $x(t)$ случайного сигнала представляет собой последовательность импульсов со случайными амплитудами (рис. 7.2). В данном случае предполагается, что все импульсы имеют одинаковую форму, а их амплитуды являются случайными величинами, статистически независимыми от импульса к импульсу. Полагается, что эти случайные величины (амплитуды) имеют одинаковые математические ожидания $\overline{Y}$ и равные дисперсии σ_Y^2. Период повторения импульсов неизменен и равен t_1, а момент взятия отсчета t_0 для какой-либо реализации является случайной величиной, равномерно распределенной в интервале длительностью t_1.

Полный вывод выражения для спектральной плотности достаточно трудоемок и поэтому здесь не приводится, однако окон-

чательный результат имеет несколько интересных особенностей Этот результат получается вследствие применения преобразования Фурье $F(\omega)$ к импульсу, описываемому функцией $f(t)$, и имеет вид

$$S_X(\omega) = |F(\omega)|^2 \left[\sigma_Y^2/t_1 + (2\pi(\overline{Y})^2/t_1^2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n/t_1) \right]. \quad (7.25)$$

Если импульс имеет прямоугольную форму, а его длительность равна t_2, то соответствующая спектральная плотность будет иметь вид, изображенный на рис. 7.3. Из выражения (7.25) можно сделать следующие выводы общего характера:

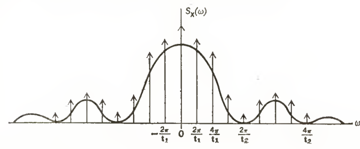


Рис. 7.3. Спектральная плотность последовательности прямоугольных импульсов со случайными амплитудами.

1. Как непрерывная составляющая спектра, так и его дискретные компоненты (их интенсивность определяется относительной высотой δ-функций) пропорциональны квадрату модуля преобразования Фурье огибающей элементарного импульса.

2. Если математическое ожидание амплитуд импульсов равно нулю, то даже при условии периодического характера их следования будет отсутствовать дискретная составляющая спектра.

3. Если дисперсия случайных амплитуд импульсов равна нулю, то будет отсутствовать непрерывная составляющая спектра.

Вышеприведенный результат можно проиллюстрировать на примере последовательности прямоугольных импульсов со случайными амплитудами. Пусть огибающая каждого элементарного (единичного) импульса описывается функцией

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } -0{,}01 \leqslant t \leqslant 0{,}01, \\ 0 & \text{при других } t, \end{cases}$$

и пусть период повторения импульсов составляет 0,1 с, а амплитуды этих импульсов являются независимыми случайными величинами, равномерно распределенными в интервале [0, 12]. Пер-

вый этап решения этой задачи заключается в определении преобразования Фурье огибающей элементарного импульса:

$$F(\omega) = \int_{-0,01}^{0,01} (1) \exp[-j\omega t]\, dt = 0,02 (\sin 0,01\omega / 0,01\omega).$$

Далее необходимо определить математическое ожидание и дисперсию случайных амплитуд. Так как амплитуды распределены равномерно, то эти статистические характеристики соответственно равны

$$\overline{Y}\,(1/2)(0+12) = 6, \quad \sigma_Y^2 = (1/12)(12-0)^2 = 12.$$

Теперь из (7.25) можно определить искомую спектральную плотность

$$S_X(\omega) = \left[0,02 \frac{\sin 0,01\omega}{0,01\omega}\right]^2 \left[\frac{12}{0,01} + \frac{2\pi (6)^2}{0,01^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{0,01}\right)\right] =$$

$$= \left[\frac{\sin 0,01\omega}{0,01\omega}\right]^2 \left[0,48 + 904 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 200\pi n)\right].$$

Отсюда видно, что спектральная плотность содержит как непрерывную составляющую, так и бесконечное число дискретных частотных компонент.

Еще одно свойство спектральной плотности относится к случаю дифференцирования случайного процесса. Предположим, что $\dot{X}(t) = dX(t)/dt$, а $X(t)$ имеет спектральную плотность, определяемую в соответствии с выражением

$$S_X(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{E[\,|F_X(\omega)|^2]}{2T}.$$

Ограниченный во времени (усеченный) процесс $\dot{X}_T(t)$ будет иметь преобразование Фурье вида $j\omega F_X(\omega)$ наряду с дополнительными компонентами в виде двух постоянных, обусловленных наличием разрывов процесса при $t = \pm T$ и стремящихся в пределе к нулю. Следовательно, спектральная плотность производной $\dot{X}(t)$ случайного процесса $X(t)$ равна

$$S_{\dot{X}}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{E[\,|j\omega F_X(\omega)(-j\omega) F_X(-\omega)|]}{2T} = \omega^2 \lim_{T\to\infty} \frac{E[\,|F_X(\omega)|^2]}{2T} =$$

$$= \omega^2 S_X(\omega). \quad (7.26)$$

Таким образом, в результате дифференцирования формируется новый случайный процесс, спектральная плотность которого в ω^2 раз отличается от спектральной плотности исходного процесса. В связи с этим следует отметить, что если $S_X(\omega)$ отлична

от нуля при $\omega = 0$, то $S_{\dot{X}}(\omega) = 0$ при $\omega = 0$. Кроме того, если $S_X(\omega)$ убывает не быстрее функции $1/\omega^2$ при $\omega \to \infty$, то при больших ω спектральная плотность $S_{\dot{X}}(\omega)$ стремится к постоянному значению, а средний квадрат производной случайного процесса становится бесконечно большим. Этот случай соответствует недифференцируемому случайному процессу.

Упражнение 7.3.1. Стационарный случайный процесс $X(t)$ имеет спектральную плотность вида

$$S_X(\omega) = 8\pi\delta(\omega) + 36\pi\delta(\omega - 16) + 36\pi\delta(\omega + 16).$$

а) Перечислить частоты всех составляющих данного процесса.
б) Определить математическое ожидание процесса $X(t)$.
в) Определить дисперсию этого случайного процесса.
Ответы: 0, ± 2, ± 16, 36.

Упражнение 7.3.2. Случайный процесс представляет собой последовательность прямоугольных импульсов, имеющих длительность 1 мс и период следования 5 мс. Амплитуды импульсов являются независимыми случайными величинами, равномерно распределенными в интервале $[A, B]$. Для каждого из следующих значений пар величин A и B определить, имеет ли спектральная плотность: только непрерывную составляющую, только дискретные составляющие, обе из этих компонент, ни одной из этих компонент, при
а) $A = -5$, $B = 5$, б) $A = 5$, $B = 15$, в) $A = 8$, $B = 8$, г) $A = 0$, $B = 8$.
Ответы: обе компоненты; ни одной из этих компонент; только дискретную составляющую; только непрерывную составляющую.

7.4. Спектральная плотность и плоскость комплексных чисел

До сих пор спектральная плотность выражалась как функция вещественной угловой частоты ω. Однако в приложениях к анализу систем часто оказывается более удобным выражать ее через комплексную частоту s, так как именно такое представление передаточных функций линейных систем является более рациональным. Подобная замена может быть осуществлена простой подстановкой s вместо $j\omega$. Следовательно, вид спектральной плотности относительно оси $j\omega$ плоскости комплексных частот сохраняется.

Формально переход к плоскости комплексных частот выполняется заменой ω на $-js$, или ω^2 на $-s^2$. В результате спектральная плотность должна обозначаться как $S_X(-js)$, однако такое обозначение нельзя признать удачным. Поэтому спектральная плотность на *s-плоскости* будет обозначаться просто как $S_X(s)$. Очевидно, что $S_X(s)$ и $S_X(\omega)$ — несколько различающиеся функции, так что соответствующие представления являются скорее символическими, нежели принципиальными.

Для частного случая рациональных спектральных плотностей, когда присутствуют только четные степени частоты ω, такая замена переменных эквивалентна подстановке $-s^2$ вместо ω^2. Например, рассмотрим рациональную спектральную плотность

$$S_X(\omega) = \frac{10(\omega^2 + 5)}{\omega^4 + 10\omega^2 + 24}.$$

Если выразить эту функцию через аргумент s, то получим

$$S_X(\omega) = S_X(-js) = \frac{10(-s^2+5)}{s^4 - 10s^2 + 24}. \qquad (7.27)$$

Любая спектральная плотность может быть представлена (за исключением коэффициента пропорциональности) в виде сочетания нулей и полюсов в плоскости комплексных частот. Такое представление часто оказывается удобным для некоторых вычислений, которые будут рассмотрены в следующих разделах. Для иллюстрации сказанного рассмотрим спектральную плотность (7.27), которая может быть представлена в виде произведения сомножителей

$$S_X(s) = \frac{-10(s+\sqrt{5})(s-\sqrt{5})}{(s+2)(s-2)(s+\sqrt{6})(s-\sqrt{6})}$$

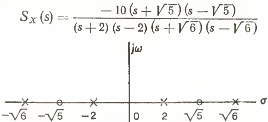


Рис. 7.4. Изображение нулей (кружки) и полюсов (крестики) спектральной плотности.

и для которой сочетание нулей и полюсов иллюстрируется рис. 7.4. Важной особенностью данного геометрического представления является его симметрия относительно оси $j\omega$. Если спектральная плотность не является рациональной, справедлива та же самая замена переменных, которая, правда, может быть и не столь явной. Например, спектральная плотность (7.25) может быть выражена в плоскости комплексных частот в виде

$$S_X(s) = F(s)F(-s)\left\{\sigma_Y^2/t_1 + [2\pi(\bar{Y})^2/t_1^2]\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(s - j2\pi n/t_1)\right\}, \qquad (7.28)$$

где $F(s)$ — *преобразование Лапласа* огибающей элементарного импульса $f(t)$.

Помимо того что использование комплексных частот облегчает анализ систем с помощью спектральных плотностей, при этом упрощается вычисление значений средних квадратов случайных процессов. Соответствующие прикладные вопросы рассматриваются в следующем разделе.

Упражнение 7.4.1. Стационарный случайный процесс имеет спектральную плотность вида

$$S_X(\omega) = \frac{25(\omega^2+16)}{\omega^4 + 34\omega^2 + 225}.$$

Определить положение полюсов и нулей этой спектральной плотности в плоскости комплексных частот.

Ответы: ± 3, ± 4, ± 5.

Упражнение 7.4.2. Стационарный случайный процесс $X(t)$ имеет спектральную плотность вида

$$S_X(\omega) = \frac{\omega^2(\omega^2+25)}{\omega^6 - 33\omega^4 + 463\omega^2 + 7569}.$$

а) Доказать, что эта спектральная плотность положительна для всех значений ω.

б) Определить положение полюсов и нулей этой спектральной плотности в плоскости комплексных частот.

Ответы: 0, ± 3, ± 5, ± 2, $\pm j5$.

7.5. Взаимосвязь среднего квадрата случайного процесса со спектральной плотностью

В процессе определения спектральной плотности было показано, что средний квадрат случайного процесса равен

$$\overline{X^2} = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)\,d\omega, \tag{7.11}$$

т. е. средний квадрат пропорционален площади, ограниченной функцией спектральной плотности.

Вычисление интеграла вида (7.11) может быть сопряжено со значительными трудностями, если спектральная плотность является сложным аналитическим выражением или содержит высокие степени аргумента ω. Классический подход к выполнению такого интегрирования заключается в замене переменной интегрирования на комплексную переменную (подстановкой s вместо $j\omega$) и использовании ряда теорем, касающихся правил интегрирования по замкнутому контуру в комплексной плоскости. По-видимому, это наиболее простой и результативный способ вычисления среднего квадрата случайного процесса, требующий, однако, владения аппаратом теории функции комплексной переменной. Методика применения соответствующих вычислительных процедур для заинтересованных в указанном методе дается в конце раздела.

Другим методом, который мы рассмотрим в первую очередь, является применение ряда табулированных функций для рациональных спектральных плотностей. Эти табулированные функции в общем виде представляют собой полиномы разных степеней, а их использование заключается в простой подстановке соответствующих чисел. Существование таких функций обусловлено в первую очередь симметрией спектральной плотности. Вследствие этой симметрии всегда представляется возможность выразить рациональную спектральную плотность в виде сомножителей

$$S_X(s) = \frac{c(s)\,c(-s)}{d(s)\,d(-s)}, \tag{7.29}$$

где $c(s)$ содержит нули левой полуплоскости, $c(-s)$ — нули правой полуплоскости, $d(s)$ и $d(-s)$ — соответственно полюсы левой и правой полуплоскостей.

Если в соотношении (7.11) при выполнении интегрирования вместо вещественной переменной использовать комплексную переменную s, то значение среднего квадрата становится равным

$$\overline{X^2} = (1/2\pi j) \int_{-j\infty}^{j\infty} S_X(s)\,ds = (1/2\pi j) \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{c(s)\,c(-s)}{d(s)\,d(-s)}\,ds. \quad (7.30)$$

В частном случае рациональных спектральных плотностей функции $c(s)$ и $d(s)$ являются полиномами относительно s и могут быть записаны в виде

$$c(s) = c_{n-1}s^{n-1} + c_{n-2}s^{n-2} + \cdots + c_0,$$
$$d(s) = d_n s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_0.$$

Некоторые коэффициенты полинома $c(s)$ могут равняться нулю; $d(s)$ должен иметь степень более высокого порядка, чем $c(s)$, и не должен иметь недостающих коэффициентов.

Интегралы вида (7.30) табулированы для значений n вплоть до 10, хотя уже при n, превышающих 3 или 4, результаты оказываются столь сложными, что их достоверность вызывает сомнение. Соответствующие табулированные интегралы в сокращенном виде приведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Таблица интегралов

$$I_n = (1/2\pi j) \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{c(s)\,c(-s)}{d(s)\,d(-s)}\,ds$$

$$c(s) = c_{n-1}s^{n-1} + c_{n-2}s^{n-2} + \cdots + c_0$$

$$d(s) = d_n s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_0$$

$$I_1 = \frac{c_0^2}{2d_0 d_1}$$

$$I_2 = \frac{c_1^2 d_0 + c_0^2 d_2}{2d_0 d_1 d_2}$$

$$I_3 = \frac{c_2^2 d_0 d_1 + (c_1^2 - 2c_0 c_2)\,d_0 d_3 + c_0^2 d_2 d_3}{2d_0 d_3\,(d_1 d_2 - d_0 d_3)}$$

В качестве примера такого расчета рассмотрим спектральную плотность вида

$$S_X(\omega) = \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 + 10\omega^2 + 9}.$$

В результате замены ω на $-js$ получаем

$$S_X(s) = \frac{-(s^2-4)}{s^4-10s^2+9} = \frac{-(s^2-4)}{(s^2-1)(s^2-9)}. \qquad (7.31)$$

Это выражение можно представить в виде произведения сомножителей

$$S_X(s) = \frac{(s+2)(-s+2)}{(s+1)(s+3)(-s+1)(-s+3)}, \qquad (7.32)$$

откуда следует, что

$$c(s) = s+2,$$

$$d(s) = (s+1)(s+3) = s^2+4s+3.$$

Мы имеем случай $n = 2$; при этом $c_1 = 1$, $c_0 = 2$, $d_2 = 1$, $d_1 = 4$, $d_0 = 3$. В соответствии с табл. 7.1 интеграл I_2 равен

$$I_2 = \frac{c_1^2 d_0 + c_0^2 d_2}{2d_0 d_1 d_2} = \frac{(1)^2(3)+(2)^2(1)}{2(3)(4)(1)} = \frac{3+4}{24} = \frac{7}{24}.$$

Поскольку $\overline{X^2} = I_2$, имеем $\overline{X^2} = 7/24$. Этот расчет выполняется чисто механически и не требует глубоких теоретических знаний. Однако при использовании этих процедур должен выполняться ряд условий, на что обращается внимание читателя. Во-первых, как было отмечено выше, степень полинома $d(s)$ должна превышать степень $c(s)$. Во-вторых, корни $c(s)$ и $d(s)$ должны располагаться только в левой полуплоскости. И в-третьих, необходимо, чтобы корни $d(s)$ не лежали на оси $j\omega$.

В рассмотренном примере спектральная плотность является рациональной и, следовательно, не содержит δ-функций. Таким образом, случайный процесс, который описывает данная спектральная плотность, имеет нулевое математическое ожидание, а значит, значение его среднего квадрата равно дисперсии. Тем не менее на практике часто встречаются случаи, когда непрерывная составляющая спектральной плотности выражается рациональной дробью, но наряду с ней существуют и дискретные составляющие, наличие которых обусловлено компонентами с ненулевыми математическими ожиданиями или периодическими компонентами. В таких случаях при определении среднего квадрата случайного процесса необходимо осуществлять раздельный анализ непрерывной и дискретной компонент спектральной плотности. Для иллюстрации рассмотрим следующий пример. Пусть спектральная плотность описывается выражением

$$S_X(\omega) = 8\pi\delta(\omega) + 36\pi\delta(\omega-16) +$$

$$+ 36\pi\delta(\omega+16) + 25(\omega^2+16)/(\omega^4+34\omega^2+225),$$

Из рассмотрения материала разд. 7.3 и уравнения (7.24) следует, что составляющая среднего квадрата, обусловленная дискретными компонентами, равна

$$\overline{X_d^2} = (1/2\pi)(8\pi + 36\pi + 36\pi) = 40.$$

Заметим, что это значение включает в себя и математическое ожидание ± 2. Непрерывная составляющая спектральной плотности может быть выражена как функция аргумента s в виде

$$S_{Xc}(s) = \frac{25(-s^2+16)}{s^4 - 34s^2 + 225},$$

или в форме произведения сомножителей

$$S_{Xc}(s) = \frac{[5(s+4)][5(-s+4)]}{[(s+3)(s+5)][(-s+3)(-s+5)]}.$$

Теперь ясно, что

$$c(s) = 5(s+4) = 5s + 20,$$

откуда $c_0 = 20$, а $c_1 = 5$. Также имеем

$$d(s) = (s+3)(s+5) = s^2 + 8s + 15,$$

откуда $d_0 = 15$, $d_1 = 8$ и $d_2 = 1$. Используя выражение интеграла I_2 из табл. 7.1, получим

$$\overline{X_c^2} = \frac{(5)^2(15) + (20)^2(1)}{2(15)(8)(1)} = 3{,}229.$$

Следовательно, суммарное значение среднего квадрата рассматриваемого случайного процесса равно

$$\overline{X^2} = 40 + 3{,}229 = 43{,}229.$$

Так как математическое ожидание этого случайного процесса равно ± 2, его дисперсия составляет $\sigma_X^2 = 43{,}229 - (2)^2 = 39{,}229$.

Выше отмечалось, что интегрирование на комплексной плоскости представляет собой универсальный и весьма эффективный метод вычисления интегралов, представленных в форме (7.30). Краткое изложение теории такого интегрирования дается в приложении И, а в данном разделе будет дан анализ еще одного метода вычисления среднего квадрата случайного процесса по известной спектральной плотности с использованием правил этого интегрирования. С тем чтобы познакомить читателей с возможностями такой универсальной процедуры, обсуждаются только технические приемы указанного метода. Читатель должен, однако, учесть, что имеется множество тонкостей, связанных с использованием математического аппарата теории функций комплексной переменной, которые могут оказаться существенными в отсутствие необходимых теоретических знаний, и читатель должен быть нацелен на освоение соответствующих вопросов теории.

Рассматриваемый в данном разделе метод основан на вычислении вычетов, а его процедура в значительной степени аналогична методике определения обратного преобразования Лапласа. Рассмотрим, например, спектральную плотность, определенную соотношениями (7.31) и (7.32). Эта спектральная плотность может быть представлена в виде сочетания полюсов и нулей, что иллюстрируется рис. 7.5. Контур интегрирования, определяемый уравнением (7.30), проходит вдоль оси $j\omega$, однако применение метода интегрирования на комплексной плоскости, рассмотренного в приложении И, требует наличия замкнутого контура. Такой замкнутый контур может быть получен путем добавления полуокружности бесконечно большого радиуса, замыкающей либо левую, либо правую полуплоскости. Использование левой полуплоскости позволяет снизить степень затруднений, связанных с алгебраическими знаками, поэтому в дальнейшем будем полагаться на выбор контура интегрирования, изображенного на рис. 7.6. Чтобы интеграл по этому замкнутому контуру был равен интегралу вдоль оси $j\omega$, необходимо, чтобы при $R \to \infty$ его компонента, соответствующая полуокружности, стремилась к нулю. Для рациональных спектральных плотностей это справедливо всегда, когда степень полинома знаменателя выше степени полинома числителя (так как присутствуют члены только четных степеней).

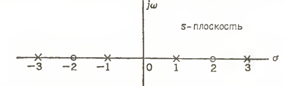


Рис. 7.5. Изображение нулей и полюсов спектральной плотности.

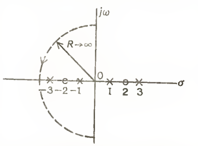


Рис. 7.6. Контур интегрирования для вычисления среднего квадрата случайного процесса.

Основная теорема в теории функций комплексной переменной утверждает, что значение интеграла по замкнутому контуру в односвязной области на комплексной плоскости в $2\pi j$ раз больше суммы вычетов K_{sj} в полюсах s_j, содержащихся внутри этого контура (см. (И.3) в приложении И). Поскольку в выражение для среднего квадрата входит множитель $1/(2\pi j)$, а выбранный замкнутый контур полностью принадлежит левой полуплоскости, зна-

чение среднего квадрата в общем случае может быть выражено как

$$\overline{X^2} = \sum \text{(вычеты в левой полуплоскости)} = \sum K_j. \quad (7.33)$$

Для рассматриваемого примера (рис. 7.6) в левой полуплоскости имеются полюсы $s_1 = -1$ и $s_2 = -3$. Вычеты легко вычислить умножением $S_X(s)$ на множитель $(s - s_j)$, содержащий указанный полюс, полагая затем s равным значению этого полюса (см. пример 1 в приложении И). Таким образом, имеем

$$K_{-1} = [(s+1)\, S_X(s)]_{s=-1} = \left[\frac{-(s+2)(s-2)}{(s-1)(s+3)(s-3)}\right]_{s=-1} = 3/16,$$

$$K_{-3} = [(s+3)\, S_X(s)]_{s=-3} = \left[\frac{-(s+2)(s-2)}{(s+1)(s-1)(s-3)}\right]_{s=-3} = 5/48.$$

Из (7.33) следует

$$\overline{X^2} = 3/16 + 5/48 = 7/24,$$

что равно полученному выше значению.

Если полюсы имеют порядок $n > 1$, то для вычисления вычетов могут быть использованы более общие приемы, рассмотренные в приложении И. Тем не менее значение среднего квадрата по-прежнему определяется формулой (7.33).

Упражнение 7.5.1. Стационарный случайный процесс $X(t)$ имеет спектральную плотность вида

$$S_X(\omega) = 16/(\omega^4 + 13\omega^2 + 36).$$

а) Пользуясь табл. 7.1, определите значение среднего квадрата этого случайного процесса.

б) Решите эту же задачу, применив интегрирование по замкнутому контуру. *Ответ*: 4/15.

Упражнение 7.5.2. При анализе условий, выполнение которых необходимо при использовании табл. 7.1, было отмечено, что в полиноме $d(s)$ коэффициенты не должны быть равны нулю.

а) Объясните, почему необходимо выполнение этого условия.

б) Проверьте ваши выводы, убедившись сначала в том, что выражение

$$S_X(\omega) = \frac{\omega^2 + 1}{\omega^4 - 4\omega^2 + 4}$$

определяет реальную спектральную плотность, а затем попытайтесь использовать таблицу для вычисления соответствующего значения среднего квадрата случайного процесса.

7.6. Взаимосвязь между спектральной плотностью и корреляционной функцией

Как было показано в гл. 6, корреляционная функция есть математическое ожидание произведения временных функций. С другой стороны, в настоящей главе мы убедились в том, что

спектральная плотность связана с математическим ожиданием произведения преобразований Фурье от этих функций. По-видимому, должна существовать непосредственная связь между двумя указанными математическими ожиданиями. Чисто интуитивно можно допустить, что спектральная плотность является преобразованием Фурье (или Лапласа) от корреляционной функции, что в действительности окажется справедливым.

Сначала рассмотрим нестационарный случайный процесс, а затем конкретизируем полученные результаты на случай стационарного процесса. В соответствии с (7.10) спектральная плотность была определена как

$$S_X(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{E\{|F_X(\omega)|^2\}}{2T},$$

где $F_X(\omega)$ — преобразование Фурье усеченной (т. е. ограниченной во времени) реализации случайного процесса, а именно

$$F_X(\omega) = \int_{-T}^{T} X_T(t) \exp[-j\omega t]\, dt; \quad T < \infty. \tag{7.34}$$

Подстановка (7.34) в (7.10) дает

$$S_X(\omega) = \lim_{T\to\infty} (1/2T)\, E\left[\int_{-T}^{T} X_T(t_1) \exp[j\omega t_1]\, dt_1 \times \right.$$
$$\left. \times \int_{-T}^{T} X_T(t_2) \exp[-j\omega t_2]\, dt_2\right], \tag{7.35}$$

так как $|F_X(\omega)|^2 = F_X(\omega) F_X(-\omega)$. Здесь вместо t введены две переменные t_1 и t_2, чтобы не было путаницы между переменными интегрирования при представлении *произведения* двух интегралов в виде *двойного интеграла*. Таким образом, представим (7.35) в форме

$$S_X(\omega) = \lim_{T\to\infty} (1/2T)\, E\left[\int_{-T}^{T} dt_2 \int_{-T}^{T} \exp[-j\omega(t_2 - t_1)] \times \right.$$
$$\left. \times X_T(t_1) X_T(t_2)\, dt_1\right] = \lim_{T\to\infty} (1/2T) \int_{-T}^{T} dt_2 \times$$
$$\times \int_{-T}^{T} \exp[-j\omega(t_2 - t_1)]\, E[X_T(t_1) X_T(t_2)]\, dt_1. \tag{7.36}$$

Можно показать, что в данном случае справедлива процедура внесения символа математического ожидания под знак двойного интеграла, однако эти подробности здесь рассматриваться не будут.

Математическое ожидание произведения двух величин, входящее в подынтегральное выражение, представляет собой корреляционную функцию усеченного случайного процесса. Таким образом,

$$E[X_T(t_1)\,X_T(t_2)] = \begin{cases} R_X(t_1,\ t_2), & |t_1|,\ |t_2| \leqslant T, \\ 0 & \text{при других } |t_1|,\ |t_2|. \end{cases} \qquad (7.37)$$

Произведя подстановку $t_2 - t_1 = \tau$, $dt_2 = d\tau$, можем записать (7.37) в виде

$$S_X(\omega) = \lim_{T\to\infty} (1/2T) \int_{-T-t_1}^{T-t_1} d\tau \int_{-T}^{T} \exp[-j\omega\tau]\, R_X(t_1,\ t_1+\tau)\, dt_1,$$

где пределы существования t_1 ограничены условием (7.37). Меняя местами порядок интегрирования и внося символ операции предельного перехода под знак первого интеграла, получим

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \lim_{T\to\infty} (1/2T) \int_{-T}^{T} R_X(t_1,\ t_1+\tau)\, dt_1 \right\} \exp[-j\omega\tau]\, d\tau. \qquad (7.38)$$

Из (7.38) ясно, что спектральная плотность представляет собой преобразование Фурье усредненной по времени корреляционной функции:

$$S_X(\omega) = \mathcal{F}\{\langle R_X(t,\ t+\tau)\rangle\}, \qquad (7.39)$$

где $\mathcal{F}$ — символ процедуры преобразования Фурье. Соотношение (7.39) справедливо и для нестационарных процессов.

Для стационарного случайного процесса корреляционная функция не зависит от выбора начального момента времени, поэтому

$$\langle R_X(t_1,\ t_1+\tau)\rangle = R_X(\tau).$$

Соответственно спектральная плотность стационарного в широком смысле случайного процесса является преобразованием Фурье корреляционной функции:

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \exp[-j\omega\tau]\, d\tau = \mathcal{F}\{R_X(\tau)\}. \qquad (7.40)$$

Соотношение (7.40), известное под названием *формулы Винера—Хинчина*, имеет фундаментальное значение для анализа случайных сигналов, так как оно устанавливает связь между представлением случайного процесса во временной области (с помощью корреляционной функции) и в частотной области (с помощью спектральной плотности). Из однозначности преобразования Фурье

следует, что корреляционная функция стационарного в широком смысле случайного процесса представляет собой обратное преобразование Фурье от спектральной плотности. Отметим, однако, что в случае нестационарного процесса корреляционная функция не может быть восстановлена по известной спектральной плотности — при этом можно получить, как это следует из (7.39), только усредненную по времени корреляционную функцию. В последующем мы будем иметь дело только со стационарными в широком смысле случайными процессами, для которых справедливо преобразование (7.40).

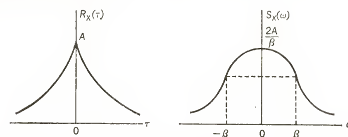


Рис. 7.7. Связь между корреляционной функцией (*а*) и спектральной плотностью (*б*).

В качестве простого примера рассмотрим корреляционную функцию вида

$$R_X(\tau) = A \exp[-\beta|\tau|], \quad \text{где } A > 0,\ \beta > 0.$$

Здесь величина τ берется по модулю в силу симметрии корреляционной функции. Эта корреляционная функция изображена на рис. 7.7, *а*, который иллюстрирует разрыв функции при $\tau = 0$. Таким образом, преобразование (7.40) должно быть представлено в виде суммы двух интегралов: одного — для отрицательных τ, второго — для положительных τ:

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{0} A \exp[\beta\tau] \exp[-j\omega\tau]\, d\tau + \int_{0}^{\infty} A \exp[-\beta\tau] \exp[-j\omega\tau]\, d\tau =$$

$$= A \{\exp[(\beta - j\omega)\tau]/(\beta - j\omega)\}\Big|_{-\infty}^{0} + A \{\exp[-(\beta + j\omega)\tau]/[-(\beta + j\omega)]\}\Big|_{0}^{\infty} =$$

$$= A[1/(\beta - j\omega) + 1/(\beta + j\omega)] = 2A\beta/(\omega^2 + \beta^2). \quad (7.41)$$

Данная спектральная плотность изображена на рис. 7.7, *б*.

Как было отмечено выше, для стационарных случайных процессов по данной спектральной плотности с использованием обратного преобразования Фурье можно однозначно определить корреляционную функцию, а именно

$$R_X(\tau) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) \exp[j\omega\tau]\, d\omega. \qquad (7.42)$$

Соответствующий пример будет приведен в следующем разделе.

При выводе формулы (7.41) из-за особенностей подынтегральной функции при $\tau = 0$ интеграл был представлен в виде двух слагаемых. Принципиально иная процедура, пригодная в любых случаях, заключается в использовании свойства симметрии корреляционной функции. При этом (7.40) можно записать в виде

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) [\cos \omega\tau - j \sin \omega\tau]\, d\tau,$$

где экспоненциальная функция $\exp[-j\omega\tau]$ выражена через синусную и косинусную составляющие. Можно заметить, что функция $R_X(\tau) \sin \omega\tau$ — нечетная относительно ω и интеграл от нее в симметричных пределах будет равен нулю, а функция $R_X(\tau) \cos \omega\tau$ — четная и интеграл от нее в пределах от $-\infty$ до ∞ будет равен удвоенному интегралу в пределах от 0 до ∞. Следовательно,

$$S_X(\omega) = 2 \int_{0}^{\infty} R_X(\tau) \cos \omega\tau\, d\tau, \qquad (7.43)$$

что является еще одним представлением спектральной плотности через корреляционную функцию, причем не требующим включения точки $\tau = 0$ в область интегрирования. Легко показать, что для стационарных в широком смысле случайных процессов формула, соответствующая обратному преобразованию Фурье, имеет вид

$$R_X(\tau) = (1/\pi) \int_{0}^{\infty} S_X(\omega) \cos \omega\tau\, d\omega. \qquad (7.44)$$

Выше отмечалось, что взаимосвязь между спектральной плотностью и корреляционной функцией можно также выразить через преобразование Лапласа. Однако необходимо помнить, что для применения преобразования Лапласа, которое чаще всего используется при анализе систем, необходимо, чтобы функция, подвергаемая этому преобразованию, была равна нулю для отрицательных значений времени. Однако корреляционные функции стионарных случайных процессов никогда не могут быть рав-

ными нулю при отрицательных τ вследствие их четности относительно своего аргумента. Следовательно, в данных ситуациях необходимо использовать *двустороннее преобразование Лапласа.* Пара соответствующих преобразований может быть представлена в виде

$$S_X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \exp[-s\tau]\, d\tau, \qquad (7.45)$$

$$R_X(\tau) = (1/2\pi j) \int_{-j\infty}^{j\infty} S_X(s) \exp[s\tau]\, ds. \qquad (7.46)$$

Так как спектральная плотность случайного процесса с конечным значением среднего квадрата не может иметь полюсов на оси $j\omega$, контур интегрирования в соответствии с (7.46) будет всегда лежать на оси $j\omega$.

Прямое двустороннее преобразование Лапласа, позволяющее получить спектральную плотность случайного процесса по его корреляционной функции, не отличается от обычного одностороннего преобразования Лапласа и не требует особых комментариев. Однако обратное двустороннее преобразование Лапласа требует несколько большей корректности в его применении, поэтому целесообразно привести простой пример использования данной процедуры.

Рассмотрим спектральную плотность, определенную в соответствии с (7.41), и представим ее как функцию аргумента s:

$$S_X(s) = -\frac{2A\beta}{s^2 - \beta^2} = -\frac{2A\beta}{(s+\beta)(s-\beta)}.$$

Эта функция имеет один полюс в левой полуплоскости и один — в правой полуплоскости. Вследствие свойства симметрии спектральной плотности количество полюсов в обеих полуплоскостях всегда одинаково. Приведенное выше выражение можно представить в виде суммы простых дробей:

$$S_X(s) = \frac{A}{s+\beta} - \frac{A}{s-\beta}.$$

Обратное преобразование Лапласа составляющих $S_X(\omega)$, содержащих полюсы в левой полуплоскости, для любого ее разложения на простые дроби представляет собой временную функцию, существующую только для положительных значений времени. Следовательно, в данном случае обратное преобразование Лапласа для первого из членов вышеприведенного разложения функции $S_X(s)$ можно интерпретировать как

$$A/(s+\beta) \leftrightarrow A \exp[-\beta\tau] \quad \text{для } \tau > 0,$$

Для вычисления значений корреляционной функции при отрицательных τ можно использовать свойство ее четности. Однако целесообразно рассмотреть более общий метод, пригодный также и для взаимных корреляционных функций, для которых свойство симметрии не выполняется. Для составляющих, входящих в разложение $S_X(s)$ на простые дроби, которые содержат полюсы в правой полуплоскости, всегда можно а) заменить s на $-s$, б) найти одностороннее обратное преобразование Лапласа функции, полюсы которой принадлежат к левой полуплоскости и в) заменить τ на $-\tau$. Применяя эту процедуру к вышеприведенной простой дроби, полюс которой находится в правой полуплоскости, получим

$$\frac{-A}{-s-\beta} = \frac{A}{s+\beta} \leftrightarrow A\exp[-\beta\tau].$$

Замена τ на $-\tau$ приводит к выражению

$$-A/(s+\beta) \leftrightarrow A\exp[\beta\tau] \quad \text{при } \tau < 0.$$

Таким образом, результирующая корреляционная функция равна

$$R_X(\tau) = A\exp[-\beta|\tau|], \quad -\infty < \tau < \infty,$$

что совпадает с выражением для исходной корреляционной функции (см. рис. 7.7). Метод, который был проиллюстрирован этим примером, является достаточно универсальным и позволяет осуществлять переход как от спектральных плотностей к корреляционным функциям, так и от взаимных спектральных плотностей (которые будут рассмотрены ниже) к взаимным корреляционным функциям.

Упражнение 7.6.1. Стационарный случайный процесс $X(t)$ имеет корреляционную функцию вида

$$R_X(\tau) = 16\exp[-2|\tau|] - 8\exp[-4|\tau|].$$

Определить спектральную плотность этого процесса.

Ответ: $768/(\omega^4 + 20\omega^2 + 64)$.

Упражнение 7.6.2. Стационарный случайный процесс имеет спектральную плотность вида

$$S_X(\omega) = 16/(\omega^4 + 13\omega^2 + 36).$$

Определить корреляционную функцию этого процесса.

Ответ: $(8/15)\{1{,}5\exp[-2|\tau|] - \exp[-3|\tau|]\}$.

7.7. Белый шум

Выше (разд. 7.3) было дано определение белого шума как случайного процесса, спектральная плотность которого постоянна для всех значений ω, т. е. $S_X(\omega) = S_0$. Представляет интерес определение корреляционной функции такого процесса. Наиболее целесообразно это сделать, приведя готовый результат и доказав

его справедливость. Рассмотрим корреляционную функцию вида δ-функции:

$$R_X(\tau) = S_0\delta(\tau).$$

Подстановка этого выражения в (7.40) дает

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)\exp[-j\omega\tau]\,d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S_0\delta(\tau)\exp[-j\omega\tau]\,d\tau = S_0, \quad (7.47)$$

что действительно представляет собой спектральную плотность белого шума. Отсюда ясно, что корреляционная функция белого шума есть δ-функция с *относительной высотой* (интенсивностью), *равной спектральной плотности*.

Выше было отмечено, что понятие белого шума — это лишь удобная абстракция, потому что средний квадрат такого процесса равен бесконечности вследствие того, что площадь, ограниченная функцией спектральной плотности, бесконечна. Этот же вывод со всей очевидностью следует из рассмотрения корреляционной функции. Напомним, что значение среднего квадрата случайного процесса равно его корреляционной функции при $\tau = 0$. Для δ-образной корреляционной функции это значение при $\tau = 0$ равно бесконечности. Тем не менее, как отмечалось выше, понятие белого шума оказывается чрезвычайно полезным при анализе линейных систем, особенно в тех случаях, когда ширина спектральной плотности случайного сигнала на входе системы значительно шире полосы пропускания этой системы. В этих условиях предположение о том, что входной случайный сигнал является белым шумом, в значительной степени может упростить расчет реакции системы; при этом ошибки, возникающие за счет такого приближения, часто оказываются незначительными. Соответствующие примеры рассматриваются в гл. 8 и 9.

Часто используется понятие *белого шума с ограниченным по полосе спектром*. При этом имеется в виду случайный процесс, спектральная плотность которого постоянна в пределах ограниченной полосы частот и равна нулю вне ее. Например (рис. 7.8, *а*):

$$S_X(\omega) = \begin{cases} S_0, & |\omega| \leqslant 2\pi W, \\ 0, & |\omega| > 2\pi W. \end{cases} \quad (7.48)$$

Случайные процессы, имеющие такую спектральную плотность, не существуют в природе, хотя значение среднего квадрата конечно и равно $\overline{X^2} = 2WS_0$. Интерес к спектральным плотностям вида (7.48) объясняется тем, что к такой идеализации можно при-

ближаться сколь угодно близко, и соответствующая модель случайного процесса оказывается удобной для анализа ряда систем.

Выражение для корреляционной функции случайного процесса со спектральной плотностью вида (7.48) легко получить из (7.42):

$$R_X(\tau) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) \exp[j\omega\tau]\, d\omega =$$

$$= (1/2\pi) \int_{-2\pi W}^{2\pi W} S_0 \exp[j\omega\tau]\, d\omega = (S_0/2\pi) \left. \frac{\exp[j\omega\tau]}{j\tau} \right|_{-2\pi W}^{2\pi W} =$$

$$= (S_0/2\pi) \{\exp[j2\pi W\tau] - \exp[-j2\pi W\tau]\}/j\tau =$$

$$= (S_0/\pi\tau) \sin 2\pi W\tau = 2WS_0 [\sin(2\pi W\tau)/2\pi W\tau].$$

Рис. 7.8. Белый шум с ограниченным по полосе спектром: *а* — спектральная плотность, *б* — корреляционная функция.

График этой функции изображен на рис. 7.8, *б*. Обратите внимание, что в пределе при $W \to \infty$ это выражение стремится к δ-функции.

На рис. 7.8, *б* можно заметить, что случайные величины, представляющие собой выборочные значения рассматриваемого случайного процесса, некоррелированны, если они разделены интервалами времени, кратными $1/2W$. Кроме того, известно, что любую временную функцию с ограниченным спектром можно точно и однозначно представить ее выборочными значениями, взятыми с частотой, вдвое превышающей ширину спектра этой функции. Это так называемая *теорема отсчетов*. Следовательно, если функция с ограниченным спектром, имеющая равномерную (постоянную) спектральную плотность, должна быть представлена ее выборочными значениями, то оказывается, что эти выборки будут некоррелированными. Отсутствие корреляции между отдельными выборками может оказаться важным преимуществом при выполнении последующего анализа. В частности, корреля-

ционная матрица, определенная в разд. 6.9, применительно к совокупности выборок рассматриваемого случайного процесса является диагональной, т. е. все ее элементы, не находящиеся на главной диагонали, равны нулю.

Упражнение 7.7.1. Стационарный случайный процесс представляет собой белый шум с ограниченным по полосе спектром в низкочастотной области, а его спектральная плотность равна

$$S_X(\omega) = \begin{cases} 0{,}01 & \text{при } |\omega| \leqslant 100\pi, \\ 0 & \text{при } |\omega| > 100\pi. \end{cases}$$

а) Определить значение среднего квадрата этого процесса.
б) Определить наименьшее значение τ, для которого корреляционная функция равна нулю.
в) Определить ширину спектральной плотности этого процесса в герцах.
Ответы: 0,01, 1, 50.

Упражнение 7.7.2. Стационарный случайный процесс представляет собой белый шум с ограниченным по полосе (на высоких частотах) спектром, а его спектральная плотность равна

$$S_X(\omega) = \begin{cases} 0{,}005 & \text{при } 200\pi \leqslant |\omega| \leqslant 250\pi, \\ 0 & \text{при других } \omega. \end{cases}$$

а) Изобразить данную спектральную плотность.
б) Определить ширину спектральной плотности этого процесса в герцах.
в) Определить значение среднего квадрата этого процесса.
Ответы: 0,25; 25.

7.8. Взаимная спектральная плотность

При рассмотрении двух коррелированных случайных процессов, например, сигналов на входе и выходе линейной системы, можно определить пару функций, называемых *взаимными спектральными плотностями*. В рамках проводимого анализа достаточно дать их определение и указать некоторые из их свойств, не приводя каких-либо формальных доказательств.

Если $F_X(\omega)$ есть преобразование Фурье усеченной реализации некоторого случайного процесса $X(t)$, а $F_Y(\omega)$ — аналогичное преобразование Фурье другого случайного процесса $Y(t)$, то взаимные спектральные плотности этих процессов могут быть определены следующим образом:

$$S_{XY}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{E[F_X(-\omega)\, F_Y(\omega)]}{2T}, \tag{7.49}$$

$$S_{YX}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{E[F_Y(-\omega)\, F_X(\omega)]}{2T}. \tag{7.50}$$

В отличие от обычных спектральных плотностей, взаимные спектральные плотности не обязательно должны быть вещественными, положительными или четными функциями ω. Они обладают следующими свойствами:

1. $S_{XY}(\omega) = S^*_{YX}(\omega)$ (знак «звездочка» означает комплексно сопряженную величину).

2. Re $[S_{XY}(\omega)]$ и Re $[S_{YX}(\omega)]$ являются четными функциями ω.

3. Im $[S_{XY}(\omega)]$ и Im $[S_{YX}(\omega)]$ являются нечетными функциями ω.

Взаимные спектральные плотности могут быть связаны с взаимными корреляционными функциями преобразованием Фурье. Таким образом, для совместно стационарных процессов (в отечественной литературе чаще используется термин «стационарно связанные случайные процессы». — *Перев.*) справедливы соотношения

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) \exp[-j\omega\tau]\, d\tau, \qquad (7.51)$$

$$R_{XY}(\tau) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(\omega) \exp[j\omega\tau]\, d\omega, \qquad (7.52)$$

$$S_{YX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{YX}(\tau) \exp[-j\omega\tau]\, d\tau, \qquad (7.53)$$

$$R_{YX}(\tau) = (1/2\pi) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{YX}(\omega) \exp[j\omega\tau]\, d\omega. \qquad (7.54)$$

Можно также связать взаимные спектральные плотности и взаимные корреляционные функции с помощью двустороннего преобразования Лапласа, как это было сделано выше для обычных спектральной плотности и корреляционной функции. Таким образом, для совместно стационарных случайных процессов справедливо

$$S_{XY}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) \exp[-s\tau]\, d\tau,$$

$$R_{XY}(\tau) = (1/2\pi j) \int_{-j\infty}^{j\infty} S_{XY}(s) \exp[s\tau]\, ds,$$

$$S_{YX}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{YX}(\tau) \exp[-s\tau]\, d\tau,$$

$$R_{YX}(\tau) = (1/2\pi j) \int_{-j\infty}^{j\infty} S_{YX}(s) \exp[s\tau]\, ds.$$

При использовании двустороннего обратного преобразования Лапласа для определения взаимной корреляционной функции не

представляется возможным применить свойство ее симметрии при отрицательных τ; при этом необходимо применить процедуру, рассмотренную в разд. 7.6. Для иллюстрации рассмотрим следующий пример. Предположим, что взаимная спектральная плотность равна

$$S_{XY}(\omega) = 96/(\omega^2 - j2\omega + 8).$$

Отметим, что функция $S_{XY}(\omega)$ является комплексной. В силу свойств взаимных спектральных плотностей (свойство 1) взаимная спектральная плотность $S_{YX}(\omega)$ является функцией, комплексно сопряженной с $S_{XY}(\omega)$. Таким образом,

$$S_{YX}(\omega) = 96/(\omega^2 + j2\omega + 8).$$

Если в $S_{XY}(\omega)$ произвести замену переменной $s = j\omega$, получим

$$S_{XY}(s) = -96/(s^2 + 2s - 8) = -96/(s + 4)(s - 2).$$

Представление в виде простых дробей дает

$$S_{XY}(s) = [16/(s + 4)] - [16/(s - 2)].$$

При полюсе в левой полуплоскости $s = -4$ имеем следующее выражение $R_{XY}(\tau)$ для положительных τ:

$$[16/(s + 4)] \leftrightarrow 16 \exp[-4\tau] \quad \text{при } \tau > 0.$$

Чтобы выполнить аналогичную процедуру с полюсом $s = 2$, находящимся в правой полуплоскости, заменим s на $-s$ и применим обратное преобразование Лапласа. Таким образом,

$$-[16/(s - 2)] \leftrightarrow [16/(s + 2)] \leftrightarrow 16 \exp[-2\tau].$$

Если τ заменить на $-\tau$ и объединить обе части, то полное выражение для взаимной корреляционной функции примет вид

$$R_{YX}(\tau) = \begin{cases} 16 \exp[-4\tau] & \text{при } \tau > 0, \\ 16 \exp[2\tau] & \text{при } \tau < 0. \end{cases}$$

Вторая взаимная корреляционная функция может быть получена из соотношения $R_{YX}(\tau) = R_{XY}(-\tau)$. Следовательно,

$$R_{XY}(\tau) = \begin{cases} 16 \exp[-2\tau] & \text{при } \tau > 0, \\ 16 \exp[4\tau] & \text{при } \tau < 0. \end{cases}$$

Упражнение 7.8.1. Взаимная корреляционная функция двух совместно стационарных случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ равна

$$R_{XY}(\tau) = \begin{cases} 9 \exp[-3\tau] & \text{при } \tau > 0, \\ 0 & \text{при } \tau < 0. \end{cases}$$

а) Определите соответствующую взаимную спектральную плотность $S_{XY}(\omega)$.
б) Определите взаимную спектральную плотность $S_{YX}(\omega)$.
Ответы: $9/(-j\omega + 3)$, $9/(j\omega + 3)$.

Упражнение 7.8.2. Взаимная спектральная плотность двух совместно стационарных случайных процессов равна

$$S_{XY}(\omega) = 1/(-\omega^2 + j2\omega + 1).$$

Определите соответствующую взаимную корреляционную функцию.
Ответ: $\tau \exp[-\tau]$, $\tau > 0$.

7.9. Измерение спектральной плотности

Когда на практике встречаются случайные процессы, часто возникает необходимость измерить ряд их параметров с тем, чтобы реализовать оптимальные алгоритмы функционирования систем обработки. Наиболее простой и зачастую оправданный с физической точки зрения случай, который и будет рассмотрен ниже, связан с предположением о том, что анализируемый случайный процесс является эргодическим. В этом случае имеется возможность оценить различные параметры случайного процесса с помощью процедур временного усреднения. Вопросы, связанные с оцениванием математического ожидания и корреляционной функции случайного процесса, были рассмотрены выше; теперь же целесообразно рассмотреть, как можно оценить распределение мощности по спектру частот, занимаемому случайным сигналом, т. е. как оценить спектральную плотность. Соответствующие оценки очень важны при решении многих прикладных задач. Например, знание спектральной плотности помехового сигнала часто позволяет определить происхождение (физическую природу) этого сигнала и осуществить его подавление или компенсацию. В случаях когда последнее не представляется возможным, знание энергетического спектра зачастую позволяет применить соответствующие фильтры, уменьшающие влияние помех.

В качестве типичного примера измерения спектральной плотности рассмотрим ситуацию, когда осуществляется непрерывное наблюдение (регистрация) случайного сигнала $x(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$. Пусть $x(t)$ — реализация эргодического случайного процесса. При этом ставится задача оценки спектральной плотности $S_X(\omega)$ на основе результатов непрерывного наблюдения реализации случайного процесса.

Может показаться, что разумный путь отыскания спектральной плотности связан с определением преобразования Фурье наблюдаемой реализации и дальнейшим предположением о том, что квадрат модуля этого преобразования Фурье и является оценкой спектральной плотности. Однако этот путь оказывается нерезультативным. Действительно, поскольку преобразование Фурье полной реализации как таковое не существует, естественно, что преобразование Фурье наблюдаемой части этой реализации представляет собой грубую оценку искомой спектральной плот-

ности. Данная процедура, использующая преобразование Фурье, была бы осуществима, если бы имелась возможность определить усредненное по ансамблю значение квадратов модулей преобразований Фурье всех (или хотя бы некоторых) реализаций случайного процесса. Однако в силу того, что наблюдаемой оказывается только одна реализация, такой подход неприемлем.

Другой подход, являющийся альтернативой вышеупомянутому методу, заключается в использовании соотношения (7.40), связывающего спектральную плотность и корреляционную функцию. Так как представляется возможным оценить корреляционную функцию на основе одной реализации случайного процесса, как это показано в разд. 6.4, преобразование Фурье этой оценки и будет выражением для оценки спектральной плотности. Именно этот подход и будет анализироваться ниже.

В соответствии с (6.14) оценка $\widehat{R}_X(\tau)$ корреляционной функции эргодического процесса $X(t)$ может быть получена из соотношения

$$\widehat{R}_X(\tau) = (T-\tau)^{-1} \int\limits_0^{T-\tau} x(t)\, x(t+\tau)\, dt, \quad 0 \leqslant \tau \ll T,$$

где $x(t)$ — произвольная реализация из ансамбля. Поскольку τ должно быть много меньше длительности интервала наблюдения (интервала усреднения) T, обозначим наибольшее допустимое значение τ как τ_m. Таким образом, $\widehat{R}_X(\tau)$ определяется соотношением (6.14) при $|\tau| \leqslant \tau_m$ и принимается равной нулю при $|\tau| > \tau_m$. Более общий способ введения данного ограничения на длительность τ заключается в умножении (6.14) на четную функцию аргумента τ, равную нулю при $|\tau| > \tau_m$. Таким образом, определим новую оценку корреляционной функции $R_X(\tau)$:

$${}_w\widehat{R}_X(\tau) = [w(\tau)/(T-\tau)] \int\limits_0^{T-\tau} x(t)\, x(t+\tau)\, dt = w(\tau)_a \widehat{R}_X(\tau), \quad (7.55)$$

где $w(\tau) = 0$ при $|\tau| > \tau_m$ и является четной функцией τ, а ${}_a\widehat{R}_X(\tau)$ теперь существует при всех τ. Эту функцию $w(\tau)$ часто называют *окном запаздывания* (в ряде источников функцию $w(\tau)$ называют *корреляционным окном*, а ее преобразование Фурье $W(\omega) = \mathcal{F}[w(\tau)]$ — *спектральным окном*. — *Перев.*), так как она видоизменяет оценку функции $R_X(\tau)$ на величину, зависящую от запаздывания (т. е. временной задержки τ), и имеет конечную длительность, равную $2\tau_m$. Введение функции $w(\tau)$ и выбор ее типа чрезвычайно важны при оценивании спектральных плотностей, что очень часто недооценивается в инженерной практике при получении таких оценок. Приводимый ниже краткий анализ

не обеспечивает в полной мере понимания этих аспектов, но может способствовать усвоению новых понятий и уяснению их значимости для получения оценок с хорошими свойствами.

Поскольку спектральная плотность представляет собой преобразование Фурье от корреляционной функции, оценка спектральной плотности может быть получена путем преобразования соотношения (7.55):

$$ {}_w\widehat{S}_X(\omega) = \mathscr{F}\,[w(\tau)_a\,\widehat{R}_X(\tau)] = (1/2\pi)\,W(\omega) * {}_a\widehat{S}_X(\omega), \qquad (7.56) $$

где $W(\omega)$ — преобразование Фурье функции $w(\tau)$, символ «$*$» означает свертку соответствующих преобразований, ${}_a\widehat{S}_X(\omega)$ — спектральная плотность, связанная с ${}_a\widehat{R}_X(\tau)$, определенной теперь для любых τ, но не являющейся оценкой $\widehat{R}_X(\tau)$ при любых τ.

Чтобы проанализировать цель введения окна запаздывания $w(\tau)$, важно подчеркнуть, что всегда имеет место определенная функция в виде специального окна запаздывания, даже если не возникает задача оценки спектральной плотности. Так как соотношение (6.14) справедливо только при $|\tau| \leqslant \tau_m$, оно эквивалентно выражению (7.55) при использовании прямоугольного окна запаздывания вида

$$ w_r(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\tau| \leqslant \tau_m, \\ 0 & \text{при } |\tau| > \tau_m. \end{cases} \qquad (7.57) $$

Таким образом, если не дано определение окна запаздывания, всегда подразумевается использование прямоугольного окна вида (7.57). Важность использования окна этого типа обусловлена тем, что соответствующее преобразование Фурье имеет вид

$$ \mathscr{F}\,[w_r(\tau)] = W_r(\omega) = 2\tau_m\,(\sin\omega\tau_m/\omega\tau_m) \qquad (7.58) $$

и, как показано на рис. 7.9, принимает отрицательные значения в пределах половины спектра частот. Таким образом, процедура свертки этого преобразования с функцией ${}_a\widehat{S}_X(\omega)$ может привести к отрицательным значениям оцениваемой спектральной плотности, даже если сама функция ${}_a\widehat{S}_X(\omega)$ нигде не является отрицательной (последнее всегда выполняется). В силу того что $\widehat{R}_X(\tau)$ может быть оценена только в ограниченном диапазоне изменения τ (для $|\tau| \leqslant \tau_m$), что обусловлено конечной длительностью отрезка разбиения наблюдаемой реализации ($\tau_m \ll T$), могут иметь место ошибочные оценки спектральной плотности независимо от того, с какой точностью определена $\widehat{R}_X(\tau)$ в пределах допустимых значений ее аргумента.

При использовании прямоугольного окна запаздывания оценка спектральной плотности будет иметь вид

$$_r\widehat{S}_X(\omega) = (1/2\pi)\, W_r(\omega) * {_a\widehat{S}_X}(\omega). \qquad (7.59)$$

Необходимо, однако, отметить, что эта функция $_r\widehat{S}_X(\omega)$ определяется не путем свертки (7.59), поскольку $_a\widehat{S}_X(\omega)$ не может быть оценена на основе ограниченного объема измерений, а в результате

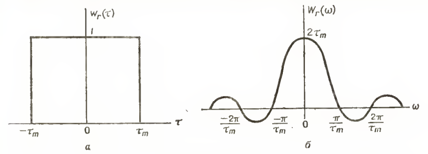


Рис. 7.9. *а* — прямоугольное окно запаздывания, *б* — соответствующее спектральное окно.

применения преобразования Фурье к функции $\widehat{R}_X(\tau)$, определенной соотношением (6.14), т. е.

$$_r\widehat{S}_X(\omega) = \mathscr{F}\,[\widehat{R}_X(\tau)], \qquad (7.60)$$

где

$$\widehat{R}_X(\tau) = \begin{cases} (T-\tau)^{-1} \int\limits_0^{T-\tau} x(t)\, x(t+\tau)\, dt, & 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_m, \\ 0, & \tau > \tau_m \end{cases}$$

и $\widehat{R}_X(\tau) = \widehat{R}_X(-\tau)$ при $\tau < 0$. Таким образом, как было отмечено выше, $_r\widehat{S}_X(\omega)$ представляет собой оценку, полученную без учета ограниченных пределов изменения τ. Теперь возникает задача, каким образом видоизменить функцию $_r\widehat{S}_X(\omega)$, чтобы минимизировать ошибки оценивания спектральной плотности. Это приводит к необходимости выбора других типов окон запаздывания $w(\tau)$.

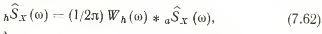
Одной из основных проблем, возникающих при анализе спектрального окна $W_r(\omega)$, является существование боковых лепестков этой функции, что непосредственно влияет на оценку $_r\widehat{S}_X(\omega)$. Ясно, что эти трудности могут быть преодолены выбором окна

запаздывания, преобразование Фурье которого характеризуется малым уровнем боковых лепестков. Одной из таких широко применяемых функций является окно Хэмминга, определяемое как

$$w_h(\tau) = \begin{cases} 0{,}54 + 0{,}46\cos(\pi\tau/\tau_m), & |\tau| < \tau_m, \\ 0, & |\tau| > \tau_m. \end{cases} \qquad (7.61)$$

Это окно запаздывания, а также его преобразование Фурье (спектральное окно) иллюстрируются рис. 7.10.

При использовании этого окна оценка спектральной плотности определяется выражением



$${}_h\hat{S}_X(\omega) = (1/2\pi)\, W_h(\omega) * {}_a\hat{S}_X(\omega), \qquad (7.62)$$

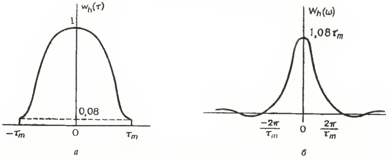


Рис. 7.10. *а* — окно запаздывания Хэмминга, *б* — соответствующее спектральное окно.

но, как и выше, данная процедура свертки не может быть реализована из-за невозможности получить оценку ${}_a\hat{S}_X(\omega)$. Однако если использовать представление вида

$$w_h(\tau) = [0{,}54 + 0{,}46\cos(\pi\tau/\tau_m)]\, w_r(\tau),$$

то получим

$$\mathcal{F}[w_h(\tau)] = W_h(\omega) = \{0{,}54\delta(\omega) + 0{,}23[\delta(\omega + \pi/\tau_m) + \delta(\omega - \pi/\tau_m)]\} * W_r(\omega),$$

так как неусеченная постоянная и косинусный член окна Хэмминга имеют преобразования Фурье в виде δ-функций. Подстановка этого результата в (7.62) и использование (7.59) дают

$${}_h\hat{S}_X(\omega) = 0{,}54\,{}_r\hat{S}_X(\omega) + 0{,}23[{}_r\hat{S}_X(\omega + \pi/\tau_m) + {}_r\hat{S}_X(\omega - \pi/\tau_m)]. \qquad (7.63)$$

Поскольку ${}_r\hat{S}_X(\omega)$ можно определить с помощью (7.60), оказывается, что (7.63) представляет собой модифицированную форму

функции ${}_r\widehat{S}_X(\omega)$, что обеспечивает положительную величину результирующей оценки.

В разд. 6.4. при рассмотрении вопросов, связанных с оценкой корреляционных функций, было отмечено, что в большинстве практических ситуаций выборка отсчетных значений x_k наблюдаемой реализации $x(t)$ должна осуществляться в дискретные моменты времени $t_k = 0,\ \Delta t,\ 2\Delta t,\ \ldots,\ N\,\Delta t$, а результирующая оценка формируется путем суммирования произведений

$$\widehat{R}_X(n\,\Delta t) = (N-n+1)^{-1}\sum_{k=0}^{N-n} x_k x_{k+n},\quad n = 0,\ 1,\ \ldots,\ M. \qquad (7.64)$$

Так как корреляционная функция оценивается только для дискретных моментов τ, необходимо выполнить дискретную аппроксимацию преобразования Фурье. Хотя существуют методы, реализующие эту процедуру и уменьшающие требуемый объем машинного времени при выполнении расчетов на ЭВМ (быстрое преобразование Фурье), представляется целесообразным рассмотреть дискретный вариант соотношения (7.42), являющийся косинусной компонентой преобразования Фурье корреляционной функции. Таким образом, при использовании прямоугольного окна оценка спектральной плотности равна

$${}_r\widehat{S}_X(q\,\Delta\omega) = \Delta t\left[\widehat{R}_X(0) + 2\sum_{n=1}^{M-1}\widehat{R}_X(n\,\Delta t)\cos(qn\pi/M) + \widehat{R}_X(M\,\Delta t)\cos q\pi\right], \qquad (7.65)$$

где $q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ M,\ \Delta\omega = \pi/M\,\Delta t$. При использовании окна Хэмминга соответствующая оценка имеет вид

$${}_h\widehat{S}_X(q\,\Delta\omega) = 0{,}54\,{}_r\widehat{S}_X(q\,\Delta\omega) + 0{,}23\,\{{}_r\widehat{S}_X[(q+1)\,\Delta\omega] + {}_r\widehat{S}_X[(q-1)\,\Delta\omega]\}, \quad (7.66)$$

что представляет собой окончательный результат. Программа расчета на ЭВМ оценки спектральной плотности при использовании окна Хэмминга дается в приложении Ж.

Чтобы проиллюстрировать описанный метод вычисления оценки спектральной плотности, предположим, что мы имеем оценку корреляционной функции эргодического случайного процесса, определенную в соответствии с (7.64) при $M = 5$ и $\Delta t = 0{,}01$. Пусть соответствующие оценочные значения корреляционной функции оказались равными

n	0	1	2	3	4	5
$\widehat{R}_X(n\,\Delta t)$	10	8	6	4	2	0

Для принятых M и Δt частотный разнос между оценочными значениями спектральной плотности равен

$$\Delta\omega = \pi/(M\ \Delta t) = \pi/5\cdot 0{,}01 = 20\pi \text{ рад/с.}$$

Используя оценочные значения корреляционной функции, с помощью (7.65) можем записать выражение для оценки спектральной плотности применительно к прямоугольному окну:

$$_r\widehat{S}_X(q\,\Delta\omega) = 0{,}01\,[10 + 2\,(8\cos(q\pi/5) + 6\cos(2q\pi/5) + 4\cos(3q\pi/5) + 2\cos(4q\pi/5))].$$

Это выражение может быть рассчитано для значений q, изменяющихся от 0 до 5, а результирующая оценка спектральной плотности для прямоугольного окна равна

q	0	1	2	3	4	5
$_r\widehat{S}_X(q\,\Delta\omega)$	0,5	0,2094	0	0,0306	0	0,020

Подставляя эти значения в (7.66), получим оценки спектральной плотности с окном Хэмминга. Окончательные значения оказываются равными

q	0	1	2	3	4	5
$_h\widehat{S}_X(q\,\Delta\omega)$	0,3664	0,2281	0,0552	0,0165	0,0116	0,0108

Хотя длительность реализации (соответственно и объем выборки), для которой была определена корреляционная функция, невелика, данный пример иллюстрирует методику применения окна Хэмминга и поясняет принцип сглаживания оценки спектральной плотности при использовании этого окна.

Было предложено много других типов окон для оценки спектральной плотности, и некоторые из них дают более точные результаты, чем окно Хэмминга, хотя их применение может и не быть столь простым при решении конкретных задач. Например, окно Бартлетта, имеющее вид равнобедренного треугольника, непосредственно может использоваться для оценки корреляционной функции, однако для оценки спектральной плотности при этом требуется реализация процедуры свертки. Другим хорошо известным окном является «хэннинг-окно», представляющее собой модифицированный вариант окна Хэмминга. Оба эти типа окон рассматриваются ниже в упражнениях и задачах.

Анализ характеристик оценок спектральной плотности, в частности, точности оценок, имеет большое научное и практическое значение, однако решение этой задачи сопряжено со значительными трудностями. Во-первых, оценки, использующие окна Хэмминга, не являются несмещенными, т. е. математическое ожидание

оценки спектральной плотности не равно истинной величине спектральной плотности. Во-вторых, возникают серьезные затруднения при определении дисперсии оценки, хотя приближенно она может быть выражена формулой

$$[{}_h\hat{S}_X(q\,\Delta\omega)] \approx (M/N)\, S_X^2(q\,\Delta\omega), \qquad (7.67)$$

когда $2M\,\Delta t$ достаточно велико, что означает наличие реализации большой длительности при определении корреляционной функции.

Если измеряемая спектральная плотность неравномерно распределена по частоте, то использование окна Хэмминга может привести к значительным ошибкам оценивания, которые могут быть минимизированы с помощью процедуры «обеления», т. е. изменения спектра таким образом, чтобы он стал почти равномерным. Наиболее существенные ошибки этого вида возникают в случае, когда наблюдаемый процесс содержит постоянную составляющую, которая обусловливает появление δ-функции в спектральной плотности. В таких ситуациях, прежде чем приступить к анализу случайного процесса, необходимо исключить эту постоянную составляющую.

Упражнение 7.9.1. Стационарный случайный процесс $X(t)$ имеет корреляционную функцию вида

$$R_X(\tau) = 10\,(\sin 100\pi\tau/100\pi\tau).$$

Осуществляется оценивание этой корреляционной функции для $|\tau| \leqslant 0{,}04$. Определите оценку спектральной плотности при $\omega = 0$ и $\omega = 100\pi$ в случае использования прямоугольного окна запаздывания этой же ширины.

Ответы: 0,05, 0,1.

Упражнение 7.9.2. Окно Бартлетта определяется в соответствии с выражением

$$w_b(\tau) = \begin{cases} 1 - (|\tau|/\tau_m) & \text{при } |\tau| \leqslant \tau_m, \\ 0 & \text{при } \tau > \tau_m. \end{cases}$$

Определите преобразование Фурье $W_b(\omega)$ этого окна запаздывания.

Ответ: $\tau_m \left(\dfrac{\sin \omega\tau_m/2}{\omega\tau_m/2}\right)^2$.

7.10. Примеры определения и применения спектральной плотности

Наиболее важная область применения спектральной плотности связана с анализом линейных систем при воздействии на них случайных сигналов. Однако, поскольку такое использование спектральной плотности детально обсуждается в следующей главе, в данном разделе оно рассматриваться не будет. Здесь будет приведен ряд примеров, поясняющих свойства спектральной плотности и методы ее расчета.

В качестве первого примера рассмотрим двоичную систему связи, в которой полезное сообщение передается с помощью случайной последовательности разнополярных импульсов прямоугольной формы (рис. 7.11). Эти импульсы равновероятны, имеют одинаковые амплитуды, а смена состояний (полярностей импульсов) осуществляется независимо от импульса к импульсу. Наличие крутых фронтов приводит к очень широкому спектру частот такого сигнала. Другой формой импульса является так называемый «приподнятый косинус»; при этом возникает вопрос, насколько

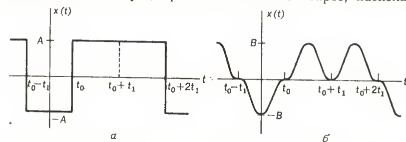


Рис. 7.11. Двоичная последовательность в виде: *а* — прямоугольных импульсов, *б* — импульсов в форме «приподнятого косинуса».

уменьшается ширина спектра такого сигнала по сравнению с шириной спектра последовательности прямоугольных импульсов.

Спектральные плотности исследуемых случайных процессов описываются выражением (7.25). В обоих случаях математическое ожидание амплитуд импульсов равно нулю (так как смены полярностей разных знаков равновозможны), а дисперсия амплитуд равна A^2 для прямоугольных импульсов и B^2 для импульсов в форме «приподнятого косинуса» (см. анализ дельта-распределения в разд. 2.7). Таким образом, все, что от нас требуется, — это найти величину $|F(\omega)|^2$ для импульсов различной формы.

Для прямоугольного импульса функция $f(t)$, описывающая его форму, равна

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } |t| \leqslant t_1/2, \\ 0 & \text{при } |t| > t_1/2. \end{cases}$$

Следовательно, преобразование Фурье этой функции имеет вид

$$F(\omega) = \int_{-t_1/2}^{t_1/2} (1) \exp[-j\omega t]\, dt = t_1 \frac{\sin(\omega t_1/2)}{\omega t_1/2},$$

и в соответствии с (7.25) спектральная плотность такого случайного двоичного сигнала равна

$$S_X(\omega) = A^2 t_1 \left[\frac{\sin(\omega t_1/2)}{\omega t_1/2} \right]^2, \qquad (7.68)$$

причем она максимальна при $\omega = 0$.

Для импульса, имеющего форму «приподнятого косинуса», соответствующая функция равна

$$f(t) = \begin{cases} {}^1/_2\,(1 + \cos(2\pi t/t_1)) & \text{при } |t| \leqslant t_1/2, \\ 0 & \text{при } |t| > t_1/2. \end{cases}$$

Преобразование Фурье этой функции имеет вид

$$F(\omega) = {}^1/_2 \int\limits_{-t_1/2}^{t_1/2} [1 + \cos(2\pi t/t_1)] \exp[-j\omega t]\, dt =$$

$$= (t_1/2) \frac{\sin(\omega t_1/2)}{\omega t_1/2} \frac{\pi^2}{\pi^2 - (\omega t_1/2)^2},$$

а соответствующая спектральная плотность равна

$$S_X(\omega) = \frac{B^2 t_1}{4} \left[\frac{\sin(\omega t_1/2)}{\omega t_1/2}\right]^2 \left[\frac{\pi^2}{\pi^2 - (\omega t_1/2)^2}\right]^2 \qquad (7.69)$$

и максимальна при $\omega = 0$.

При оценке ширины спектральной плотности могут использоваться различные критерии. В тех случаях, когда необходимо уменьшить взаимное влияние сигналов двух систем связи, целесообразно ввести в рассмотрение полосу частот, вне пределов которой уровень спектральной плотности оказывается меньше определенной доли (например, менее 1 %) ее максимального значения. Таким образом, необходимо определить ω_1, удовлетворяющее соотношениям

$$[S_X(\omega)/S_X(0)] \leqslant 0{,}01, \quad |\omega| > \omega_1.$$

Поскольку $\sin(\omega t_1/2)$ не может быть больше единицы, это условие применительно к (7.68) будет выполняться, если

$$\frac{A^2 t_1}{(\omega t_1/2)^2\, A^2 t_1} \leqslant 0{,}01,$$

откуда для прямоугольного импульса $\omega_1 \approx 20/t_1$. Для импульса, имеющего форму «приподнятого косинуса», это условие приобретает вид

$$\frac{(B^2 t_1/4)\,[1/(\omega t_1/2)]^2\,[\pi^2/(\pi^2 - (\omega t_1/2)^2)]^2}{B^2 t_1/4} \leqslant 0{,}01,$$

откуда $\omega_1 \approx 10{,}68/t_1$. Сравнивая полученные выражения для ω_1, можно сделать вывод, что использование импульсов в форме «приподнятого косинуса» вместо прямоугольных импульсов приводит к уменьшению полосы частот, занимаемой сигналом, почти в два раза при условии, что эта полоса определяется по сформулированному выше критерию.

Почти все примеры рассмотренных спектральных плотностей относятся к функциям, имеющим низкочастотный спектр, т. е. максимум которых имеет место при $\omega = 0$. На практике, однако,

часто возникают ситуации, когда максимум спектральной плотности соответствует некоторой высокой частоте. В качестве примера на рис. 7.12 изображены типичная спектральная плотность случайного процесса, пропущенного через узкополосный фильтр, и расположение нулей и полюсов этой функции. Выражение для спектральной плотности в области комплексных частот легко получается из графика расположения нулей и полюсов:

$$S_X(s) = \frac{S_0(s)(-s)}{(s+\alpha+j\omega_0)(s+\alpha-j\omega_0)(s-\alpha+j\omega_0)(s-\alpha-j\omega_0)} = \\ = \frac{-S_0 s^2}{[(s+\alpha)^2+\omega_0^2][(s-\alpha)^2+\omega_0^2]}, \quad (7.70)$$

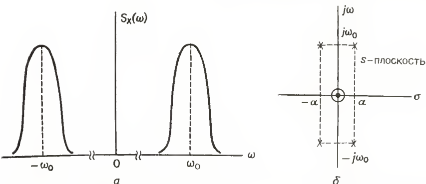


Рис. 7.12. *а* — спектральная плотность узкополосного случайного процесса, *б* — расположение нулей и полюсов этой спектральной плотности.

где S_0 — масштабный коэффициент. Следует обратить внимание на то, что данная спектральная плотность на нулевой частоте равна нулю.

Значение среднего квадрата случайного сигнала со спектральной плотностью (7.70) можно рассчитать любым из способов, рассмотренных в разд. 7.5. С помощью табл. 7.1 легко найти

$$c(s) = s, \quad c_1 = 1, \quad c_0 = 0,$$

$$d(s) = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \omega_0^2, \quad d_2 = 1, \quad d_1 = 2\alpha, \quad d_0 = \alpha^2 + \omega_0^2.$$

При этом соотношение между значением среднего квадрата $\overline{X^2}$ и интегралом I_2 имеет вид

$$\overline{X^2} = S_0 I_2 = S_0 \frac{c_1^2 d_0 + c_0^2 d_2}{2 d_0 d_1 d_2} = S_0 \frac{(1)^2(\alpha^2+\omega_0^2)+0}{2(\alpha^2+\omega_0^2)(2\alpha)(1)}.$$

В результате мы получаем интересный вывод, заключающийся в том, что значение среднего квадрата рассматриваемого случайного процесса зависит только от параметра α, характеризующего

ширину его спектральной плотности, и не зависит от центральной частоты ω_0.

Рассмотрим еще один пример, поясняющий физический смысл спектральной плотности, используя для этого выражение

$$\overline{X^2} = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)\, d\omega.$$

Данное выражение устанавливает связь между значением полного среднего квадрата случайного процесса и общей площадью, ограниченной графиком его спектральной плотности.

Значение среднего квадрата для ограниченного диапазона частот $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ аналогично связано с площадью, ограниченной графиком спектральной плотности в пределах этого частотного диапазона. Это означает, что если выбрать две частоты ω_1 и ω_2, то в заключенном между ними диапазоне значение среднего квадрата $\overline{X^2_{\Delta\omega}}$ равно

$$\overline{X^2_{\Delta\omega}} = (1/2\pi) \left[\int_{-\omega_2}^{-\omega_1} S_X(\omega)\, d\omega + \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_X(\omega)\, d\omega \right] = (1/\pi) \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_X(\omega)\, d\omega. \tag{7.71}$$

Последнее равенство в (7.71) справедливо в силу четности функции $S_X(\omega)$ относительно ω.

В качестве иллюстрации сказанного вернемся к рассмотрению спектральной плотности, определенной выражением (7.41):

$$S_X(\omega) = 2A\beta/(\omega^2 + \beta^2),$$

где A — значение полного среднего квадрата случайного процесса. Пусть требуется определить частоту, выше которой значение среднего квадрата (или средняя мощность) составляет половину его суммарной величины. Это означает, что необходимо найти такое значение ω_1 (при $\omega_2 = \infty$), для которого

$$\frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\infty} \frac{2A\beta}{\omega^2 + \beta^2}\, d\omega = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{2A\beta}{\omega^2 + \beta^2}\, d\omega \right] = A/2.$$

Поскольку A в левой и правой частях сокращаются, получим

$$\int_{\omega_1}^{\infty} (\omega^2 + \beta^2)^{-1}\, d\omega = \pi/4\beta.$$

Выполняя интегрирование, имеем

$$[(1/\beta) \operatorname{arctg}(\omega/\beta)] \Big|_{\omega_1}^{\infty} = (1/\beta) [(\pi/2) - \operatorname{arctg}(\omega_1/\beta)] = \pi/4\beta,$$

откуда $\operatorname{arctg}(\omega_1/\beta) = \pi/4$ и $\omega_1 = \beta$.

Таким образом, в нашем примере средняя мощность случайного процесса поровну распределена в пределах участков спектра частот выше β и ниже β. Заметим, что в данном частном случае величина β является также частотой, на которой спектральная плотность равна половине ее максимального значения, соответствующего частоте $\omega = 0$. Этот результат характерен именно для данной спектральной плотности и не является справедливым в общем случае. Например, для белого шума с ограниченным спектром (рис. 7.8) спектральная плотность сохраняет неизменным значение S_0 в диапазоне частот до $\omega = 2\pi W$, причем половина средней мощности приходится на частоты, превышающие $\omega = \pi W$.

Упражнение 7.10.1. Говорят, что случайный процесс имеет спектр Баттерворта n-го порядка, если его спектральная плотность имеет вид

$$S_X(\omega) = [1 + (\omega/2\pi W)^{2n}]^{-1},$$

где W — ширина спектральной плотности на уровне половинной мощности.

а) Определите ширину полосы частот, вне пределов которой спектральная плотность составляет менее 1 % ее максимального значения.

б) Для $n = 1$ определите ширину полосы частот, вне пределов которой сосредоточено не более 1 % средней мощности.

Ответы: $2\pi W\,(99)^{1/2n}$, $400W$.

Упражнение 7.10.2. Пусть в двоичной системе связи, рассмотренной в этом разделе, используются импульсы треугольной формы. Предположим, что функция, описывающая форму этих импульсов, имеет вид

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |2t/t_1| & \text{при } |t| \leqslant t_1/2, \\ 0 & \text{при } |t| > t_1/2. \end{cases}$$

Определите ширину спектра этого сигнала, используя введенный выше критерий.

Ответ: $12{,}56/t_1$.

ЗАДАЧИ

7.1.1. Усеченный случайный процесс $X(t)$ имеет вид $X(t) = M$ при $|t| \leqslant T$ и равен нулю при остальных $|t|$. Случайная величина M равномерно распределена в интервале $[-6, 18]$.

а) Определите математическое ожидание этого случайного процесса.

б) Найдите его преобразование Фурье.

в) Определите математическое ожидание этого преобразования Фурье.

г) Каким образом ведет себя данное преобразование Фурье при $T \to \infty$?

7.2.1. а) Примените теорему Парсеваля для вычисления интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\sin 4\omega/4\omega)(\sin 8\omega/8\omega)\, d\omega.$$

б) Примените теорему Парсеваля для вычисления интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\omega^4 + 5\omega^2 + 4)^{-1}\, d\omega.$$

7.2.2. Спектральная плотность стационарного случайного процесса равна

$$S_X(\omega) = \begin{cases} 1 - |\omega|/8\pi & \text{при } |\omega| \leqslant 8\pi, \\ 0 & \text{при других } |\omega|. \end{cases}$$

Определите значение среднего квадрата (средней мощности) этого процесса.

7.2.3. Пусть некоторый случайный процесс со спектральной плотностью $S_X(\omega)$ имеет значение среднего квадрата, равное 4. Определите значения средних квадратов случайных процессов, имеющих спектральные плотности вида а) $4S_X(\omega)$, б) $S_X(4\omega)$, в) $S_X(\omega/4)$, г) $4S_X(4\omega)$.

7.3.1. Для каждой из следующих функций частоты ω установить, могут ли они являться спектральными плотностями случайных процессов, если нет, то пояснить, почему

а) $(\omega^2 + 3\omega + 1)^{-1}$, г) $\dfrac{\omega^2 + 4}{\omega^4 - 4\omega^2 + 1}$,

б) $\dfrac{\omega^2 + 16}{\omega^4 + 9\omega^2 + 18}$, д) $(1 - \cos\omega)^2/\omega^2$,

в) $10\exp[-\omega^2]$, е) $\delta(\omega) + \omega^3/(\omega^4 + 1)$.

7.3.2. Стационарный случайный процесс описывается выражением

$$X(t) = M + 5\cos(10t + \theta_1) + 10\sin(5t + \theta_2),$$

где M — случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[-3, 9]$, а θ_1 и θ_2 — случайные величины, равномерно распределенные в интервале $[0, 2\pi]$. Все три случайные величины M, θ_1 и θ_2 взаимно независимы. Для этого случайного процесса определите: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) спектральную плотность.

7.3.3. Спектральная плотность стационарного случайного процесса $X(t)$ равна

$$S_X(\omega) = 32\pi\delta(\omega) + 8\pi\delta(\omega - 6) + 8\pi\delta(\omega + 6) + \\ + 32\pi\delta(\omega - 12) + 32\pi\delta(\omega + 12).$$

а) Определите математическое ожидание этого случайного процесса.

б) Определите дисперсию процесса $X(t)$.

в) Перечислите все дискретные частотные компоненты этого случайного процесса.

7.3.4. Для случайной последовательности импульсов, показанной на рисунке, с одинаковыми вероятностями может иметь место отсутствие или наличие импульсов с периодом, равным 0,1 с. Момент начального отсчета времени t_0 является случайной величиной (случайной относительно ансамбля возможных реализаций), равномерно распределенной в интервале длительностью 0,1 с. Определите для этого случайного процесса а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) спектральную плотность.

x(t)

2

0,05

$t_0 - 0,1$ t_0 $t_0 + 0,1$ $t_0 + 0,2$ t

7.4.1. Спектральная плотность стационарного случайного процесса $X(t)$ равна

$$S_X(\omega) = \frac{16(\omega^2+36)}{\omega^4+13\omega^2+36}.$$

а) Запишите выражение для этой спектральной плотности как функции комплексной частоты s.

б) Перечислите все ее полюса и нули.

в) Определите значения спектральной плотности на частоте 1 Гц.

г) Предположим, что должна быть осуществлена нормировка (масштабирование) спектральной плотности таким образом, чтобы на нулевой частоте она осталась неизменной, а на частоте 100 Гц стала равной исходной спектральной плотности на частоте 1 Гц. Запишите выражение для полученной таким образом спектральной плотности как функции s.

7.4.2. Значение спектральной плотности случайного процесса на нулевой частоте равно 10 В²/Гц. На комплексной частотной плоскости нули этой функции имеют место в точках ± 5, а полюса имеют координаты $\pm 2 \pm j5$ и $\pm 6 \pm j3$.

Запишите выражение для спектральной плотности а) как функции s, б) как функции ω.

в) Определите значение спектральной плотности на частоте 1 Гц.

7.5.1. Определите значение среднего квадрата случайного процесса со спектральной плотностью, определенной а) в задаче 7.3.1а, б) в задаче 7.3.1г.

7.5.2. а) Используя табл. 7.1, вычислите значение среднего квадрата случайного процесса со спектральной плотностью, определенной в задаче 7.3.2.

б) Выполнить предыдущее задание путем интегрирования по контуру в плоскости комплексных частот.

7.5.3. Вычислите значение среднего квадрата (среднюю мощность) стационарного случайного процесса $X(t)$, спектральная плотность которого равна

$$S_X(s) = \frac{-s^2}{s^4-52s^2+576}.$$

7.5.4. Определите значение среднего квадрата стационарного случайного процесса, спектральная плотность которого равна

$$S_X(\omega) = \frac{\omega^2+10}{\omega^4+5\omega^2+4} + 8\pi\delta(\omega) + 2\pi\delta(\omega-3) + 2\pi\delta(\omega+3).$$

7.6.1. Стационарный случайный процесс $X(t)$ имеет корреляционную функцию вида

$$R_X(\tau) = \begin{cases} 10(1-|\tau|/0{,}05) & \text{при } |\tau| \leqslant 0{,}05, \\ 0 & \text{при других } |\tau|. \end{cases}$$

Определите для этого случайного процесса а) дисперсию, б) спектральную плотность, в) значения ω и τ, для которых соответственно спектральная плотность и корреляционная функция равны нулю.

7.6.2. Корреляционная функция стационарного случайного процесса равна

$$R_X(\tau) = 16\exp[-5|\tau|]\cos 20\pi\tau + 8\cos 10\pi\tau.$$

Определите: а) дисперсию этого случайного процесса, б) его спектральную плотность, в) значение спектральной плотности на нулевой частоте.

7.6.3. Спектральная плотность стационарного случайного процесса $X(t)$ равна

$$S_X(\omega) = \begin{cases} 5 & \text{при } 10 \leqslant |\omega| \leqslant 20, \\ 0 & \text{при других } |\omega|. \end{cases}$$

Определите: а) значение среднего квадрата этого случайного процесса, б) его корреляционную функцию, в) значение корреляционной функции при $\tau = 0$.

7.6.4. Корреляционная функция нестационарного случайного процесса имеет вид

$$R_X(t,\ t+\tau) = 8\exp[-5|\tau|](\cos 20\pi t)^2.$$

а) Определите спектральную плотность этого случайного процесса.

б) Какой вид должна иметь корреляционная функция, чтобы соответствующий случайный процесс был стационарным?

7.7.1. Спектральная плотность стационарного случайного процесса равна

$$S_X(\omega) = 9/(\omega^2 + 64).$$

а) Запишите выражение для спектральной плотности белого шума с ограниченным спектром частот, имеющей такое же значение на нулевой частоте и определяющей то же значение среднего квадрата.

б) Определите корреляционную функцию случайного процесса, описываемого исходной спектральной плотностью.

в) Определите корреляционную функцию белого шума с ограниченным спектром частот (п. а.).

г) Сравните значения двух полученных корреляционных функций при $\tau = 0$ и графики этих функций.

7.7.2. Спектральная плотность стационарного случайного процесса $X(t)$ равна

$$S_X(\omega) = \begin{cases} 0{,}01 & \text{при } |\omega| \leqslant 1000\pi, \\ 0 & \text{при других } |\omega|. \end{cases}$$

а) Определите корреляционную функцию этого случайного процесса.

б) Определите наименьшее значение τ, при котором корреляционная функция равна нулю.

в) Определите степень корреляции (т. е. значение корреляционной функции) между выборочными значениями этого процесса, взятыми с частотой 1000 отсчетов/с. Проделайте то же самое для частоты выборки, равной 1500 отсчетов/с.

7.8.1. Спектральная плотность $S_X(\omega)$ стационарного случайного процесса $X(t)$ равна $S_X(\omega) = 16/(\omega^2 + 16)$, а спектральная плотность $S_Y(\omega)$ независимого от него случайного процесса $Y(t)$ имеет вид $S_Y(\omega) = \omega^2/(\omega^2 + 16)$. Эти два процесса образуют новый случайный процесс $U(t) = X(t) + Y(t)$. Определите

а) спектральную плотность случайного процесса $U(t)$,

б) взаимную спектральную плотность $S_{XY}(\omega)$,

в) взаимную спектральную плотность $S_{XU}(\omega)$.

7.8.2. Из двух случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$, определенных в задаче 7.8.1, образован новый случайный процесс $V(t) = X(t) - Y(t)$. Определите взаимную спектральную плотность $S_{UV}(\omega)$.

7.9.1. Для условий и результатов решения задачи 6.4.1, связанной с оценкой корреляционной функции, выполнить:

а) Оценку спектральной плотности для прямоугольного окна запаздывания при $q = 0,\ 1,\ 2,\ 3$.

б) Оценку спектральной плотности для окна Хэмминга с использованием результатов п. а.

в) Приближенный расчет дисперсии оценки спектральной плотности для $q = 0$.

7.9.2. Так называемое «хэннинг-окно», одним из первых нашедшее применение для сглаживания оценок спектральных плотностей, во временной области описывается выражением

$$w(\tau) = \begin{cases} 0{,}5 + 0{,}5\cos(\pi\tau/\tau_m) & \text{при } |\tau| \leqslant \tau_m, \\ 0 & \text{при других } |\tau|. \end{cases}$$

а) Получите выражение для оценки спектральной плотности при использовании «хэннинг-окна», аналогичное выражению (7.66) для окна Хэмминга.

б) Сравните уровни боковых лепестков спектральных окон при использовании окна Хэмминга и «хэннинг-окна».

7.9.3. Используя данные задачи 7.9.1, найдите оценку спектральной плотности при использовании «хэннинг-окна».

7.10.1. Рассмотрим систему связи, в которой используются двоичные импульсы, имеющие форму «приподнятого косинуса», описываемые функцией

$$f(t) = \begin{cases} {}^1/_2\,(1 + \cos \pi t/t_1) & \text{при } |t| \leqslant t_1, \\ 0 & \text{при других } |t|. \end{cases}$$

Заметим, что эти импульсы в два раза шире импульсов, изображенных на рис. 7.11, *б*, однако длительность информационного двоичного символа осталась равной t_1. Очевидно, что эти импульсы перекрываются во времени, однако в области пика (вершины) каждого из них перекрытие за счет влияния предшествующего и последующего импульсов отсутствует. Сигнал такой структуры используется для дальнейшего уменьшения занимаемой им полосы частот по сравнению со случаем применения стандартной последовательности импульсов, имеющих форму «приподнятого косинуса».

а) Запишите выражение для спектральной плотности полученной таким образом последовательности импульсов.

б) Найдите частоту ω_1, для которой (т. е. больше которой) уровень спектральной плотности меньше 1 % ее максимального значения.

в) Какой вывод можно сделать относительно ширины полосы частот, занимаемой сигналами этой системы связи по сравнению с сигналами, рассмотренными в разд. 7.10?

7.10.2. Спектральная плотность стационарного случайного процесса имеет полюса на плоскости комплексных частот, расположенные в точках с координатами $s = \pm 10 \pm j100$.

а) Найдите ширину этой спектральной плотности (в герцах), соответствующую уровню половинной мощности. Поясним, что эта ширина определяется как полоса частот, ограниченная точками, в которых уровень спектральной плотности равен половине ее максимального значения.

б) Найдите ширину спектральной плотности, ограниченную частотами, для которых уровень спектральной плотности составляет 1 % ее максимального значения.

7.10.3. В системе связи осуществляется передача импульсов прямоугольной формы со скоростью 2400 бит/с. Определите приближенно частоту спектра такого сигнала, ниже которой содержится 90 % его средней мощности.

7.10.4. Спектральная плотность случайного процесса $X(t)$ имеет вид

$$S_X(\omega) = [1 + (\omega/2\pi B_1)^2]^{-n}.$$

а) Выразите ширину спектральной плотности (в герцах), соответствующую уровню половинной мощности, через B_1.

б) Определите значение частоты, выше которой уровень спектральной плотности всегда меньше ее максимального значения.

ЛИТЕРАТУРА

См. список литературы к гл. 1. Особый интерес для изучающих материал данной главы представляют [3, 6, 8]. Приводимая ниже дополнительная литература предназначена для более глубокого изучения вопросов, связанных с оценкой спектральных плотностей:

1. *Blackman R. B., Tukey J. W.* The Measurement of Power Spectra. New York: Dover Publications, 1958.

Это — классический источник в изучаемой области, являющийся одновременно ценным справочником, облегчающим понимание вопросов, связанных с измерением спектральной плотности.

2. *Jenkins G. M., Watts D. G.* Spectral Analysis and Its Applications. San Francisco: Holden-Day, 1968.

Книга дает изложение спектрального анализа для читателей с более высоким уровнем подготовки и до сих пор считается одним из наиболее авторитетных источников в данной области.

Глава 8

Реакция линейных систем на воздействие случайных сигналов

8.1. Введение

Материал, рассмотренный в предыдущих главах, был посвящен выбору методов наглядного и рационального математического представления случайных функций времени. Следующий этап должен заключаться в определении того, каким образом могут быть использованы эти методы для определения реакции (отклика), т. е. выходного сигнала линейной системы при действии на ее входе случайного, а не детерминированного сигнала.

Мы полагаем, что читатель уже знаком с традиционными методами анализа линейных систем во временной или частотной областях. В рамках представляемого материала упоминание об этих методах осуществляется для внесения ясности в вводимые обозначения, однако при этом не предпринимаются попытки рассмотрения фундаментальных концепций, лежащих в основе данных методов. В качестве характеристик собственно линейной системы будем рассматривать ее *импульсную характеристику* $h(t)$ или *комплексную частотную характеристику* $H(j\omega)$, представляющую собой преобразование Фурье функции $h(t)$. Часто представляется целесообразным использовать также *передаточную функцию* системы $H(s)$, являющуюся преобразованием Лапласа импульсной характеристики. В большинстве случаев для удобства начальные условия полагаются нулевыми, однако при необходимости может быть осуществлен учет ненулевых начальных условий с помощью известных методов.

Если воздействие на входе линейной системы является детерминированным, то любой известный подход позволяет получить однозначные соотношения между входным и выходным сигналами. При наличии на входе системы реализации случайного процесса опять же существует взаимно однозначное соответствие процессов на входе и выходе, однако в силу их случайной природы невозможно явное представление (описание) возбуждающего воздействия, а значит, и отклика системы. В данном случае в нашем распоряжении остается либо вероятностное, либо статистическое описание отклика системы именно потому, что мы должны использовать такое описание для самого возбуждающего воздей-

ствия, т. е. случайного процесса на входе системы [1]). Из этих двух методов описания (вероятностного и статистического) статистический метод оказывается более результативным. Только для ограниченного круга задач представляется возможным получить вероятностное описание выходного процесса исходя из подобного описания процесса на входе, тогда как для большого числа случаев, представляющих практический интерес, легко получить статистическую модель выходного процесса путем применения простых математических операций к статистической модели входного процесса (путем пересчета числовых статистических характеристик, корреляционной функции и спектральной плотности входного случайного процесса к выходу.— *Перев.*). С помощью этого метода могут быть определены такие характеристики случайного процесса на выходе линейной системы, как его математическое ожидание, корреляционная функция и спектральная плотность. Ниже будет рассматриваться только статистический подход.

8.2. Анализ во временной области

Посредством интеграла свертки можно определить реакцию линейной системы на воздействие самого общего вида. Для систем с изменяющимися во времени параметрами или для нестационарных случайных воздействий (а также при одновременном возникновении обеих этих ситуаций) соответствующий анализ оказывается достаточно сложным, поэтому эти случаи в дальнейшем рассматриваться не будут. С тем чтобы приблизить проводимый анализ к реальным ситуациям, ограничим наше рассмотрение случаем физически реализуемых систем (в отечественной литературе в последнее время чаще используется термин «физически возможные системы». — *Перев.*), являющихся при этом устойчивыми. Обозначим через $x(t)$, $h(t)$ и $y(t)$ соответственно входной процесс, импульсную характеристику системы и выходной процесс (рис. 8.1). Тогда связь между ними может быть установлена с помощью соотношения

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(t-\lambda)\, h(\lambda)\, d\lambda, \tag{8.1}$$

или

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda. \tag{8.2}$$

[1]) Напомним, что под вероятностным описанием случайного процесса мы понимаем его представление с помощью ряда вероятностных функций (одномерных и многомерных функций распределения, плотностей вероятностей и т. д. — *Перев.*); под статистическим описанием мы понимаем представление с помощью характеристик, усредненных по ансамблю реализаций (в частности, с использованием математического ожидания, дисперсии, корреляционной функции).

Условия физической реализуемости и устойчивости системы определяются выражениями

$$h(t) = 0, \quad t < 0, \tag{8.3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty. \tag{8.4}$$

Исходя из этих определений, можно получить много важных характеристик выходного сигнала линейной системы при действии на ее входе стационарного случайного процесса.

Рассмотрим простой пример анализа во временной области процесса воздействия детерминированного сигнала на линейную систему с целью пояснения методики этого анализа и ее обобщения на случай воздействия недетерминированных сигналов. Пусть импульсная характеристика линейной системы равна

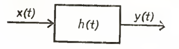


Рис. 8.1. Представление линейной системы во временной области.

$$h(t) = \begin{cases} 5 \exp[-3t], & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Ясно, что эта импульсная характеристика удовлетворяет условиям физической реализуемости и устойчивости. Пусть на входе этой линейной системы имеет место детерминированный случайный процесс (в соответствии с отечественной терминологией — «квазидетерминированный процесс». — *Перев.*) вида

$$X(t) = M + 4 \cos(2t + \theta), \quad -\infty < t < \infty,$$

где M и θ — взаимно независимые случайные величины, из которых θ равномерно распределена в интервале $[0, 2\pi]$. Заметим, что этот процесс стационарен, но не обладает свойством эргодичности. Кроме того, так как известно представление входного сигнала в явной математической форме, можно получить и явное математическое выражение для выходного сигнала, несмотря на то что этот сигнал содержит случайные параметры. Следовательно, данная ситуация существенно отличается от случаев, анализ которых составляет основное содержание этой главы, а именно, когда на входе линейной системы имеют место недетерминированные случайные процессы, не имеющие явного математического описания.

Хотя для определения сигнала на выходе линейной системы в равной мере могут использоваться выражения (8.1) и (8.2), применим последнее из них. Тогда получим

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{t} [M + 4\cos(2\lambda + \theta)]\, 5 \exp[-3(t - \lambda)]\, d\lambda.$$

В результате интегрирования имеем

$$Y(t) = {}^5/_3 M + (20/13)\,[3\cos(2t+\theta) + 2\sin(2t+\theta)].$$

Отсюда следует, что сигнал на выходе рассматриваемой линейной системы также является случайным процессом и содержит те же самые случайные параметры, что и процесс на входе. Более того, если определены плотности вероятностей этих случайных величин, то можно вычислить такие статистические характеристики выходного процесса, как его математическое ожидание и дисперсия. Это иллюстрируется следующими упражнениями.

Упражнение 8.2.1. Импульсная характеристика линейной системы описывается выражением

$$h(t) = \begin{cases} t\exp[-5t], & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

На входе такой системы наблюдается случайный процесс $X(t)$ вида $X(t) = M$, $-\infty < t < \infty$, где M — случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[-6, 18]$.

а) Запишите выражение для случайного процесса на выходе системы.

б) Определите математическое ожидание выходного сигнала.

в) Определите дисперсию выходного сигнала.

Ответы: 48/625, 6/25, $M/25$.

Упражнение 8.2.2. Импульсная характеристика линейной системы описывается выражением

$$h(t) = \begin{cases} 5\delta(t) + 3, & 0 \leqslant t < 1, \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$$

На входе такой системы наблюдается реализация случайного процесса $X(t)$, описываемого выражением

$$X(t) = 4\sin(2\pi t + \theta), \quad -\infty < t < \infty,$$

где θ — случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[0, 2\pi]$.

а) Запишите выражение для случайного процесса на выходе системы.

б) Найдите математическое ожидание процесса.

в) Вычислите дисперсию выходного процесса.

Ответы: 0; 200; $20\sin(2\pi t + \theta)$.

8.3. Математическое ожидание и средний квадрат сигнала на выходе линейной системы

Наиболее удобная форма интеграла свертки, связывающего недетерминированный случайный процесс $X(t)$ на входе линейной системы, имеющей импульсную характеристику $h(t)$, с процессом $Y(t)$ на выходе, имеет вид

$$Y(t) = \int_0^\infty X(t-\lambda)\,h(\lambda)\,d\lambda. \tag{8.5}$$

Предпочтительность такого представления обусловлена тем, что пределы интегрирования в (8.5) не зависят от t. Используя эту форму записи, рассмотрим сначала математическое ожидание

случайного сигнала $Y(t)$ на выходе системы, которое по определению равно

$$\overline{Y} = E[Y(t)] = E\left[\int_0^\infty X(t-\lambda)\, h(\lambda)\, d\lambda\right]. \tag{8.6}$$

Следующим очевидным шагом должно быть изменение последовательности выполнения операций интегрирования и статистического усреднения, а именно внесение символа математического ожидания под знак интеграла. Прежде чем приступить к непосредственной реализации этой процедуры, необходимо рассмотреть условия, при выполнении которых правомерно такое изменение порядка выполнения указанных операций.

Задача определения математического ожидания интеграла, подынтегральное выражение которого содержит случайную функцию, возникает достаточно часто. Почти во всех этих случаях желательно иметь возможность внесения операции усреднения под знак интеграла, что упрощает подынтегральное выражение. К счастью, такая процедура возможна почти во всех ситуациях, представляющих практический интерес, а поэтому она широко используется в изложении последующего материала с небольшими к ней комментариями, а иногда и без них. Следует, однако, постоянно иметь в виду условия, при которых указанная процедура оказывается возможной, даже если доводы в пользу их правомерности не совсем понятны. Эти условия могут быть определены следующим образом.

Если $Z(t)$ — некоторый случайный процесс (или какая-либо его функция, например, квадрат этого процесса), а $f(t)$ — какая-либо неслучайная функция времени, то

$$E\left[\int_{t_1}^{t_2} Z(t)\, f(t)\, dt\right] = \int_{t_1}^{t_2} E[Z(t)]\, f(t)\, dt$$

при условии, что

1) $\int_{t_1}^{t_2} E[|Z(t)|]\,|f(t)|\,dt < \infty$,

2) процесс $Z(t)$ ограничен на интервале $[t_1, t_2]$, где t_1 и t_2 могут быть бесконечно большими (при этом не требуется стационарность процесса $Z(t)$).

При использовании этого соотношения в анализе линейных систем неслучайной функцией времени $f(t)$ обычно является импульсная характеристика $h(t)$. При воздействии на линейную систему стационарных в широком смысле случайных процессов величина $E[|Z(t)|]$ является постоянной, не зависящей от времени t. Следовательно, для выполнения условия 1 достаточно,

чтобы было удовлетворено условие устойчивости (8.4). Для реальных сигналов функция $Z(t)$ всегда ограниченна, за исключением ряда математических моделей, для которых соответствующая функция времени может и не быть ограниченной.

Возвращаясь к задаче определения математического ожидания случайного процесса $Y(t)$ на выходе линейной системы применительно к случаю воздействия на нее стационарного в широком смысле случайного процесса $X(t)$, запишем

$$\bar{Y} = \int_0^\infty E[X(t-\lambda)]\, h(\lambda)\, d\lambda = \bar{X} \int_0^\infty h(\lambda)\, d\lambda. \qquad (8.7)$$

Необходимо напомнить известный результат из анализа систем, заключающийся в том, что площадь, ограниченная импульсной характеристикой, равна коэффициенту усиления системы по постоянному току (т. е. характеризует степень усиления системой постоянной составляющей входного воздействия), или, что то же самое, значению амплитудно-частотной характеристики при $\omega = 0$. Следовательно, выражение (8.7) устанавливает тот очевидный факт, что постоянная составляющая выходного сигнала равна постоянной составляющей входного сигнала, умноженной на коэффициент усиления системы по постоянному току. Если математическое ожидание случайного процесса $X(t)$, действующего на входе системы, равно нулю, то математическое ожидание выходного процесса $Y(t)$ также будет равным нулю. Если система не пропускает постоянную составляющую тока, то соответствующий выходной процесс всегда будет иметь нулевое математическое ожидание.

Для определения значения среднего квадрата выходного сигнала необходимо вычислить математическое ожидание произведения двух интегралов. Однако если ввести две переменные интегрирования, то это произведение можно всегда представить в виде двойного интеграла

$$\overline{Y^2} = E[Y^2(t)] = E\left[\int_0^\infty X(t-\lambda_1)\, h(\lambda_1)\, d\lambda_1 \int_0^\infty X(t-\lambda_2)\, h(\lambda_2)\, d\lambda_2\right] =$$

$$= E\left[\int_0^\infty d\lambda_1 \int_0^\infty X(t-\lambda_1)\, X(t-\lambda_2)\, h(\lambda_1)\, h(\lambda_2)\, d\lambda_2\right] = \qquad (8.8)$$

$$= \int_0^\infty d\lambda_1 \int_0^\infty E[X(t-\lambda_1)\, X(t-\lambda_2)]\, h(\lambda_1)\, h(\lambda_2)\, d\lambda_2, \qquad (8.9)$$

где разные индексы при переменных интегрирования λ_1 и λ_2 введены во избежание путаницы. Математическое ожидание выра-

жения под знаком второго интеграла представляет собой корреляционную функцию входного случайного процесса, а именно

$$E\,[X\,(t-\lambda_1)\,X\,(t-\lambda_2)] = R_X\,(t-\lambda_1-t+\lambda_2) = R_X\,(\lambda_2-\lambda_1).$$

Следовательно, выражение (8.9) приобретает вид

$$\overline{Y^2} = \int_0^\infty d\lambda_1 \int_0^\infty R_X\,(\lambda_2-\lambda_1)\,h\,(\lambda_1)\,h\,(\lambda_2)\,d\lambda_2. \qquad (8.10)$$

Обычно вычисление величины $\overline{Y^2}$ в соответствии с (8.10) не представляет собой значительных затруднений в случаях, когда $R_X\,(\tau)$ и $h\,(t)$ содержат только экспоненциальные функции. Тем не менее соответствующие процедуры часто оказываются очень громоздкими. Это обусловлено тем, что в ряде случаев корреляционные функции имеют разрывы их производных в нуле (в данном случае при $\lambda_1 = \lambda_2$), вследствие чего интегрирование должно выполняться в пределах нескольких областей. Эти особенности будут рассмотрены ниже. На данном этапе, однако, целесообразно проанализировать более простой случай, когда на вход линейной системы воздействует случайный процесс типа белого шума. Как было показано в разд. 7.7, при этом справедливо соотношение

$$R_X\,(\tau) = S_0\delta\,(\tau),$$

где S_0 — двусторонняя спектральная плотность белого шума. Тогда соотношение (8.10) можно переписать в виде

$$\overline{Y^2} = \int_0^\infty d\lambda_1 \int_0^\infty S_0\delta\,(\lambda_2-\lambda_1)\,h\,(\lambda_1)\,h\,(\lambda_2)\,d\lambda_2. \qquad (8.11)$$

Интегрируя по переменной λ_2, получим

$$\overline{Y^2} = S_0 \int_0^\infty h^2\,(\lambda)\,d\lambda. \qquad (8.12)$$

Следовательно (а это важный результат), значение среднего квадрата $\overline{Y^2}$ пропорционально площади, ограниченной квадратом импульсной характеристики [2]).

В качестве иллюстрации применения этих соотношений рассмотрим пример линейной системы в виде интегрирующей RC-цепи, реализующей в данном случае фильтр нижних частот (рис. 8.2).

---

[2]) Необходимо отметить, что для некоторых функций этот интеграл может оказаться расходящимся даже при выполнении условия (8.4). Это имеет место, например, когда $h\,(t)$ содержит δ-функции. Примером соответствующей системы может являться RC-цепь, реализующая фильтр высоких частот.

В соответствии с (8.7) математическое ожидание выходного сигнала $Y(t)$ равно

$$\overline{Y} = \overline{X} \int_0^\infty b \exp[-b\lambda]\, d\lambda = \overline{X} b \left. \frac{\exp[-b\lambda]}{-b} \right|_0^\infty = \overline{X}. \qquad (8.13)$$

Этот результат легко проверить, убедившись в том, что коэффициент усиления этой цепи по постоянному току равен единице.

Вычислим теперь значение среднего квадрата случайного процесса $Y(t)$ на выходе этой цепи при воздействии на ее вход белого шума. Из (8.12) имеем

$$\overline{Y^2} = S_0 \int_0^\infty b^2 \exp[-2b\lambda]\, d\lambda = b^2 S_0 \left. \frac{\exp[-2b\lambda]}{-2b} \right|_0^\infty = bS_0/2. \qquad (8.14)$$

Следует заметить, что параметр b, являющийся величиной, обратно пропорциональной постоянной времени рассматриваемой цепи ($b = 1/\tau_c$, где $\tau_c = RC$), связан также с ее полосой пропускания B соотношением

$$B = 1/2\pi RC = b/2\pi \text{ [Гц]},$$

так что (8.14) можно переписать в виде

$$\overline{Y^2} = \pi B S_0. \qquad (8.15)$$

Из вышеизложенного очевидно, что значение среднего квадрата случайного процесса на выходе такой цепи возрастает по линейному закону с увеличением ее полосы пропускания. Такой результат является характерным для случаев, когда ширина спектра случайного процесса на входе линейной системы намного превышает полосу пропускания этой системы.

Рис. 8.2. RC-цепь, реализующая фильтр нижних частот с передаточной характеристикой

$$H(s) = [RC(s + 1/RC)]^{-1} = b/(s+b),$$

где $b = 1/RC$,

и импульсной характеристикой

$$h(t) = \begin{cases} be^{-bt}, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Далее следовало бы рассмотреть ситуацию, когда входной случайный процесс $X(t)$ не является белым шумом. При этом должен быть вычислен двойной интеграл вида (8.10), что представляет собой трудоемкую процедуру, являющуюся лишь частным вариантом более общей задачи определения корреляционной функции случайного процесса $Y(t)$ на выходе линейной системы. Так как решение этой задачи в ее полном объеме лишь в незначительной степени сложнее процедуры вычисления значения сред-

него квадрата того же самого случайного процесса, эти вопросы рассмотрим в следующем разделе.

Упражнение 8.3.1. Импульсная характеристика линейной системы определяется выражением $h(t) = t \exp[-3t]\, u(t)$, где $u(t)$ — единичная ступенчатая функция. На вход такой системы воздействует аддитивная смесь белого шума с двусторонней спектральной плотностью 4 В²/Гц, и постоянной составляющей 2 В. Определите

а) математическое ожидание случайного процесса на выходе этой системы,
б) его дисперсию,
в) значение среднего квадрата выходного процесса.

Ответы: 0,037, 0,0864, 0,2222.

Упражнение 8.3.2. На вход интегратора со сбросом воздействует белый шум, имеющий двустороннюю спектральную плотность, равную 0,25 В²/Гц. Импульсная характеристика интегратора определяется выражением $h(t) = 5[u(t) - u(t - 0{,}2)]$. Найдите а) математическое ожидание случайного процесса на выходе этой системы,

б) значение среднего квадрата выходного процесса.

Ответы: 0, 1,25.

8.4. Корреляционная функция случайного процесса на выходе линейной системы

Определение корреляционной функции случайного процесса $Y(t)$, действующего на выходе линейной системы, непосредственно связано с задачей вычисления его среднего квадрата. По определению эта корреляционная функция равна

$$R_Y(\tau) = E[Y(t)\, Y(t+\tau)].$$

Следуя методике, которая использовалась применительно к равенству (8.9) и в отличие от которой в подынтегральном выражении второго сомножителя, стоящего под знаком математического ожидания, необходимо заменить t на $t + \tau$, получим соотношение для корреляционной функции

$$R_Y(\tau) = \int_0^\infty d\lambda_1 \int_0^\infty E[X(t-\lambda_1)\, X(t+\tau-\lambda_2)]\, h(\lambda_1)\, h(\lambda_2)\, d\lambda_2. \qquad (8.16)$$

В данном случае математическое ожидание в подынтегральном выражении равно

$$E[X(t-\lambda_1)\, X(t+\tau-\lambda_2)] = R_X(t-\lambda_1-t-\tau+\lambda_2) = R_X(\lambda_2-\lambda_1-\tau).$$

Тогда выражение для корреляционной функции выходного процесса $Y(t)$ будет иметь вид

$$R_Y(\tau) = \int_0^\infty d\lambda_1 \int_0^\infty R_X(\lambda_2-\lambda_1-\tau)\, h(\lambda_1)\, h(\lambda_2)\, d\lambda_2, \qquad (8.17)$$

где R_X — корреляционная функция случайного процесса $X(t)$ на входе линейной системы. Следует обратить внимание на сход-

ство между этим результатом и выражением для среднего квадрата (8.10), которые, как и следовало ожидать, оказываются идентичными при $\tau = 0$.

В случае воздействия на линейную систему белого шума выражение для корреляционной функции процесса на ее выходе существенно упрощается. Пусть, как и ранее, для $R_X(\tau)$ справедливо соотношение $R_X(\tau) = S_0\delta(\tau)$, которое подставим в (8.17), тогда получим

$$R_Y(\tau) = \int_0^\infty d\lambda_1 \int_0^\infty S_0\delta(\lambda_2 - \lambda_1 - \tau)\, h(\lambda_1)\, h(\lambda_2)\, d\lambda_2 =$$

$$= S_0 \int_0^\infty h(\lambda_1)\, h(\lambda_1 + \tau)\, d\lambda_1. \quad (8.18)$$

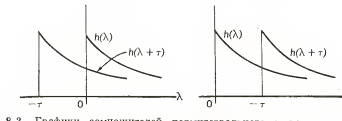


Рис. 8.3. Графики сомножителей подынтегрального выражения (8.18) для RC-цепи, изображенной на рис. 8.2.

Таким образом, при воздействии белого шума на линейную систему корреляционная функция выходного процесса пропорциональна корреляционной функции импульсной характеристики этой системы.

Этот вывод можно пояснить на примере воздействия белого шума на линейную цепь, изображенную на рис. 8.2. При этом

$$R_Y(\tau) = S_0 \int_0^\infty b \exp[-b\lambda]\, b \exp[-b(\lambda + \tau)]\, d\lambda =$$

$$= b^2 S_0 \exp[-b\tau] \left. \frac{\exp[-2b\lambda]}{-2b} \right|_0^\infty = (bS_0/2) \exp[-b\tau], \quad \tau \geqslant 0. \quad (8.19)$$

Данный результат справедлив только при $\tau \geqslant 0$. Для $\tau < 0$ должна быть выбрана другая область интегрирования, так как импульсная характеристика при отрицательных значениях аргумента всегда равна нулю. Эти рассуждения можно пояснить с помощью рис. 8.3, иллюстрирующего вид функций (сомножителей) $h(\lambda)$ и $h(\lambda + \tau)$, входящих в подынтегральное выражение равенства (8.18), для случаев $\tau \geqslant 0$ и $\tau < 0$. Естественно, если

один из этих сомножителей равен нулю, то подынтегральное выражение также оказывается равным нулю. При $\tau < 0$ соотношение (8.18) приводится к виду

$$R_Y(\tau) = S_0 \int_{-\tau}^{\infty} b \exp[-b\lambda]\, b \exp[-b(\lambda+\tau)]\, d\lambda =$$

$$= b^2 S_0 \exp[-b\tau] \frac{\exp[-2b\lambda]}{-2b} \Bigg|_{-\tau}^{\infty} = (bS_0/2) \exp[b\tau], \quad \tau < 0. \quad (8.20)$$

Объединяя (8.19) и (8.20), получим в целом выражение для корреляционной функции, справедливое как для положительных, так и для отрицательных τ:

$$R_Y(\tau) = (bS_0/2) \exp[-b|\tau|], \quad -\infty < \tau < \infty. \quad (8.21)$$

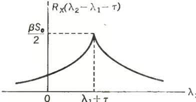


Рис. 8.4. Корреляционная функция, входящая в выражение (8.17).

Теперь ясно, что расчеты для $\tau < 0$ можно было и не производить. Действительно, так как корреляционная функция является четной функцией аргумента τ, общее выражение можно непосредственно получить из (8.19) заменой τ на $|\tau|$. К такому приему мы будем прибегать неоднократно в дальнейшем.

Целесообразно рассмотреть хотя бы один пример, когда входной случайный процесс не является белым шумом. При этом можно было бы пояснить ряд возникающих трудностей, связанных с операцией интегрирования в (8.18), а также использовать полученные результаты для того, чтобы сформулировать выводы и рекомендации, касающиеся правомерности и практической пользы аппроксимации реального случайного процесса белым шумом. С этой целью предположим, что случайный процесс, воздействующий на вход RC-цепи, изображенной на рис. 8.2, имеет корреляционную функцию вида

$$R_X(\tau) = (\beta S_0/2) \exp[-\beta|\tau|], \quad -\infty < \tau < \infty. \quad (8.22)$$

Коэффициент $\beta S_0/2$ выбран с тем расчетом, чтобы спектральная плотность этого случайного процесса на частоте $\omega = 0$ была равна S_0 (см. (7.41) и рис. 7.7, *б*). Таким образом, полагается, что на низких частотах спектральная плотность данного случайного процесса равна спектральной плотности введенного выше (т. е. формирующего его) белого шума.

Для определения в этом случае областей интегрирования целесообразно рассматривать корреляционную функцию $R_X(\lambda_2 - \lambda_1 - \tau)$ как функцию переменной λ_2 при $\tau \geqslant 0$ (рис. 8.4).

Так как в соответствии с (8.17) λ_2 всегда считается положительной, очевидно, что пределы интегрирования по переменной λ_2 должны быть равны $\lambda_2 = (0, \lambda_1 + \tau)$ и $\lambda_2 = (\lambda_1 + \tau, \infty)$. Следовательно, (8.17) можно записать в форме

$$R_Y(\tau) = \int_0^\infty d\lambda_1 \int_0^{\lambda_1+\tau} R_X(\lambda_2 - \lambda_1 - \tau)\, h(\lambda_1)\, h(\lambda_2)\, d\lambda_2 +$$

$$+ \int_0^\infty d\lambda_1 \int_{\lambda_1+\tau}^\infty R_X(\lambda_2 - \lambda_1 - \tau)\, h(\lambda_1)\, h(\lambda_2)\, d\lambda_2 = (b^2\beta S_0/2) \times$$

$$\times \int_0^\infty \exp[-(b+\beta)\lambda_1]\, d\lambda_1 \int_0^{\lambda_1+\tau} \exp[-\beta\tau] \exp[-(b-\beta)\lambda_2]\, d\lambda_2 +$$

$$+ (b^2\beta S_0/2) \int_0^\infty \exp[-(b-\beta)\lambda_1]\, d\lambda_1 \int_{\lambda_1+\tau}^\infty \exp[\beta\tau] \exp[-(b+\beta)\lambda_2]\, d\lambda_2 =$$

$$= \frac{b^2\beta S_0}{-2(b-\beta)} \exp[-\beta\tau] \int_0^\infty \exp[-(b+\beta)\lambda_1] \times$$

$$\times \{\exp[-(b-\beta)(\lambda_1+\tau)] - 1\}\, d\lambda_1 -$$

$$- \frac{b^2\beta S_0}{-2(b+\beta)} \exp[\beta\tau] \int_0^\infty \exp[-(b-\beta)\lambda_1] \exp[-(b+\beta)(\lambda_1+\tau)]\, d\lambda_1 =$$

$$= \frac{b^2\beta S_0}{2(b-\beta)} \left\{ -\frac{\exp[-b\tau]}{2b} + \frac{\exp[-\beta\tau]}{b+\beta} \right\} + \frac{b^2\beta S_0}{2(b+\beta)} \frac{\exp[-b\tau]}{2b} =$$

$$= \frac{b^2\beta S_0}{2(b^2-\beta^2)} \{\exp[-\beta\tau] - (\beta/b)\exp[-b\tau]\}, \quad \tau > 0. \tag{8.23}$$

Используя свойство симметрии (четности корреляционной функции), можно непосредственно записать аналогичное выражение для $\tau < 0$. Окончательно получим

$$R_Y(\tau) = \frac{b^2\beta S_0}{2(b^2-\beta^2)} \{\exp[-\beta|\tau|] - (\beta/b)\exp[-b|\tau|]\}. \tag{8.24}$$

Чтобы сравнить полученный результат с выражением, выведенным выше для случая воздействия на линейную систему белого шума, необходимо перейти к пределу $\beta \to \infty$. При этом

$$\lim_{\beta\to\infty} R_Y(\tau) = (bS_0/2)\exp[-b|\tau|], \tag{8.25}$$

что совпадает с (8.21). Однако наибольший интерес представляет случай, когда β много больше b, но тем не менее является конечной величиной. Это соответствует реальной физической ситуации, когда ширина спектра входного случайного процесса существенно

превышает полосу пропускания линейной системы. Для сравнения результатов, соответствующих двум вышеупомянутым случаям, представим (8.24) в виде

$$R_Y(\tau) = (bS_0/2)\exp[-b|\tau|][1/(1-b^2/\beta^2)] \times \times \{1-(b/\beta)\exp[-(\beta-b)|\tau|]\}. \quad (8.26)$$

Первый сомножитель в (8.26) представляет собой корреляционную функцию выходного процесса системы при воздействии на ее вход белого шума. Второй и третий сомножители характеризуют степень отличия реальной корреляционной функции от корреляционной функции, соответствующей аппроксимации реального входного процесса белым шумом. Очевидно, когда β намного превышает b, оба этих сомножителя стремятся к единице.

Основная цель этих рассуждений заключается в том, чтобы подчеркнуть, что на практике возникает большое число ситуаций, когда ширина спектра шумового воздействия на входе системы значительно больше полосы ее пропускания, и при этом вполне допустимо использовать аппроксимацию этого воздействия процессом типа белого шума. Благодаря этому существенно уменьшается трудоемкость вычислений без ощутимых потерь точности. Например, при использовании усилителя с высоким коэффициентом усиления и полосой пропускания 10 МГц наиболее интенсивной составляющей его шумов является дробовой шум первого каскада, ширина спектральной плотности которого может достигать 1000 МГц. Следовательно, коэффициент b/β, входящий в соотношение (8.26), равен всего лишь 0,01, а ошибка аппроксимации реального случайного процесса (в данном случае дробового шума), действующего на входе усилителя, белым шумом не будет превышать 1 %.

Упражнение 8.4.1. Для случая воздействия белого шума на вход интегратора со сбросом, импульсная характеристика которого определена в упражнении 8.3.2, определите значения корреляционной функции выходного процесса при следующих τ: а) $\tau = 0$, б) $\tau = 0{,}1$, в) $\tau = 0{,}21$.

Ответы: 0, 0,625, 1,25.

Упражнение 8.4.2. Импульсная характеристика линейной системы имеет вид

$$h(t) = 3\exp[-3t]\,u(t).$$

На вход этой системы воздействует случайный процесс, корреляционная функция которого равна $R_X(\tau) = 2\exp[-4|\tau|]$. Определите корреляционную функцию при следующих значениях ее аргумента: а) $\tau = 0$, б) $\tau = 0{,}5$, в) $\tau = 1$.

Ответы: 0,1236, 0,417, 0,8571.

8.5. Взаимная корреляционная функция случайных процессов на входе и выходе линейной системы

Если случайный процесс воздействует на вход линейной системы, то должна существовать определенная связь выходного процесса с процессом на входе. Значит, эти процессы будут кор-

релированными, а при этом большое значение имеют природа и характер их взаимной корреляционной функции. Действительно, ниже на примере будет показано, как эта функция может быть использована при реализации методов экспериментального определения импульсной характеристики любой линейной системы.

Одна из двух возможных ($R_{XY}(\tau)$ или $R_{YX}(\tau)$) взаимных корреляционных функций входного и выходного случайных процессов определяется соотношением

$$R_{XY}(\tau) = E[X(t)\,Y(t+\tau)], \tag{8.27}$$

а с учетом (8.5) приводится к виду

$$R_{XY}(\tau) = E\left[X(t)\int_0^\infty X(t+\tau-\lambda)\,h(\lambda)\,d\lambda\right]. \tag{8.28}$$

Так как функция $X(t)$ не зависит от λ, она может быть внесена под знак интеграла; после этого аналогичная процедура справедлива и для операции математического ожидания, символ которой также можно внести под знак интеграла. Тогда получим

$$R_{XY}(\tau) = \int_0^\infty E[X(t)\,X(t+\tau-\lambda)]\,h(\lambda)\,d\lambda = \int_0^\infty R_X(\tau-\lambda)\,h(\lambda)\,d\lambda. \tag{8.29}$$

Таким образом, данная взаимная корреляционная функция является сверткой корреляционной функции случайного процесса на входе системы и импульсной характеристики этой системы.

Вторая взаимная корреляционная функция рассматриваемой пары равна

$$R_{YX}(\tau) = E[X(t+\tau)\,Y(t)] = E\left[X(t+\tau)\int_0^\infty X(t-\lambda)\,h(\lambda)\,d\lambda\right] =$$

$$= \int_0^\infty E[X(t+\tau)\,X(t-\lambda)]\,h(\lambda)\,d\lambda = \int_0^\infty R_X(\tau+\lambda)\,h(\lambda)\,d\lambda. \tag{8.30}$$

Так как корреляционная функция входного процесса, входящая в подынтегральное выражение равенства (8.30), симметрична относительно $\lambda = -\tau$, а импульсная характеристика всегда равна нулю для отрицательных значений λ, взаимная корреляционная функция $R_{YX}(\tau)$ всегда будет отличаться от $R_{XY}(\tau)$. Однако при $\tau = 0$ эти взаимные корреляционные функции имеют одинаковые значения.

Рассмотрим простой пример, поясняющий методику вычисления взаимных корреляционных функций данного типа. Пусть на вход линейной системы, изображенной на рис. 8.2, поступает

случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией вида (8.22). При этом взаимная корреляционная функция может быть выражена как

$$R_{XY}(\tau) = \int_0^\tau \{(\beta S_0/2)\exp[-\beta(\tau-\lambda)]\}\, b\exp[-b\lambda]\,d\lambda + \\ + \int_\tau^\infty \{(\beta S_0/2)\exp[-\beta(\lambda-\tau)]\}\, b\exp[-b\lambda]\,d\lambda,\quad \tau \geqslant 0. \quad (8.31)$$

Непосредственно выполнив интегрирование, получим

$$R_{XY}(\tau) = \beta b S_0 \{[\beta/(\beta^2-b^2)]\exp[-b\tau] - \\ - [1/2(\beta-b)]\exp[-b\tau]\},\quad \tau \geqslant 0. \quad (8.32)$$

Выражение для $R_{XY}(\tau)$ при $\tau < 0$ имеет вид

$$R_{XY}(\tau) = \int_0^\infty \{(\beta S_0/2)\exp[-\beta(\lambda-\tau)]\}\, b\exp[-b\lambda]d\lambda. \quad (8.33)$$

Интегрирование (8.33) приводит к равенству

$$R_{XY}(\tau) = [\beta b S_0/2(\beta+b)]\exp[\beta\tau],\ \tau < 0. \quad (8.34)$$

Другая взаимная корреляционная функция $R_{YX}(\tau)$ может быть получена из соотношения

$$R_{YX}(\tau) = R_{XY}(-\tau). \quad (8.35)$$

Вышеприведенные результаты оказываются еще более простыми при воздействии на вход линейной системы белого шума. При этом имеем равенства $R_X(\tau) = S_0\delta(\tau)$ и

$$R_{XY}(\tau) = \int_0^\infty S_0\delta(\tau-\lambda)\,h(\lambda)\,d\lambda = \begin{cases} S_0 h(\tau), & \tau \geqslant 0, \\ 0, & \tau < 0. \end{cases} \quad (8.36)$$

Аналогично имеем

$$R_{YX}(\tau) = \int_0^\infty S_0\delta(\tau+\lambda)\,h(\lambda)\,d\lambda = \begin{cases} 0, & \tau > 0, \\ S_0 h(-\tau), & \tau \leqslant 0. \end{cases} \quad (8.37)$$

Из этих равенств именно соотношение (8.36) лежит в основе процедуры измерения (экспериментального определения) импульсной характеристики системы, что будет рассмотрено ниже.

Рассмотрим структурную схему, представленную на рис. 8.5. Входной процесс $X(t)$ представляет собой случайный процесс, ширина спектральной плотности которого велика по сравнению с полосой пропускания системы, импульсную характеристику которой требуется измерить. В инженерной практике приемлемые

результаты достигаются даже в случае, когда отношение этих параметров не превышает 10. При этом, как отмечалось выше, полагается, что входным воздействием является белый шум.

Входной процесс $X(t)$ наряду с его воздействием на испытываемую систему (систему, импульсную характеристику которой требуется экспериментально определить) поступает также в тракт, где осуществляется его задержка на τ секунд. Если необходимо определить полную импульсную характеристику (т. е. импульсную характеристику на всем интервале ее существования), τ должно изменяться в пределах от нуля до значения, соответству-

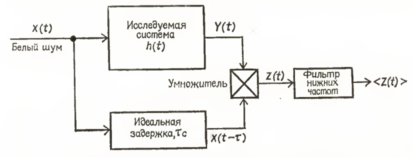


Рис. 8.5. Структурная схема, поясняющая метод экспериментального определения импульсной характеристики линейной системы.

ющего пренебрежимо малой величине импульсной характеристики. Такая задержка может быть реализована несколькими различными способами. В частности, применение аналоговых методов предполагает использование магнитного барабана, воспроизводящая головка которого может перемещаться по его периметру на произвольное расстояние относительно записывающей головки. Однако более современные методы основаны на дискретизации входного сигнала с частотой, превышающей не менее чем в два раза ширину его спектральной плотности, и последующей задержке его выборочных значений с помощью линий задержки, построенных на основе приборов с зарядовой связью или коммутируемых емкостных элементов. С другой стороны, может осуществляться квантование выборочных значений на конечное число уровней (см. разд. 2.7) с последующей задержкой полученных квантованных величин в сдвиговых регистрах. В рамках проводимого анализа будем просто полагать, что на выходе линии задержки имеет место сигнал вида $X(t-\tau)$.

Затем осуществляется перемножение сигнала $Y(t)$ с выхода исследуемой системы и задержанной копии входного сигнала $X(t-\tau)$, в результате чего формируется процесс $Z(t) = X(t-\tau)\,Y(t)$, поступающий на вход фильтра нижних частот. Если

полоса пропускания этого фильтра достаточно мала, то доминирующей компонентой сигнала на его выходе будет постоянная составляющая процесса $Z(t)$, в дополнение к которой будет присутствовать случайная компонента незначительной интенсивности. При эргодическом входном сигнале $X(t)$ процесс $Z(t)$ также будет эргодическим [3]), а постоянная составляющая процесса $Z(t)$ (т. е. результат его временного усреднения) оказывается равной его математическому ожиданию

$$\langle Z(t)\rangle \approx E[Z(t)] = E[Y(t)X(t-\tau)] = R_{XY}(\tau), \qquad (8.38)$$

так как в силу стационарности случайного процесса $Z(t) = Y(t)X(t-\tau)$ его математическое ожидание равно

$$E[Y(t)X(t-\tau)] = E[X(t)Y(t+\tau)] = R_{XY}(\tau). \qquad (8.39)$$

Но из (8.36) следует, что

$$\langle Z(t)\rangle \approx \begin{cases} S_0 h(\tau), & \tau \geqslant 0, \\ 0, & \tau < 0. \end{cases}$$

Таким образом, постоянная составляющая сигнала на выходе фильтра нижних частот пропорциональна импульсной характеристике, вычисленной при фиксированном τ. Изменяя задержку τ, можно измерить импульсную характеристику системы во всем диапазоне изменения τ.

На первый взгляд этот метод измерения импульсной характеристики может показаться трудным вариантом решения простой задачи. Действительно, представляется, что было бы проще подать на вход линейной системы сигнал в форме δ-функции (или импульс, являющийся ее аппроксимацией) и проанализировать выходной сигнал. Однако существуют по крайней мере две причины, препятствующие реализации этой прямой процедуры из-за невозможности либо нежелательности ее осуществления. Во-первых, достаточно интенсивный по амплитуде короткий импульс (а именно такой сигнал и может являться физической аппроксимацией δ-функции) может вывести систему в *нелинейную* область далеко за пределами диапазона ее нормального функционирования. Во-вторых, в ряде случаев возникает необходимость непрерывного измерения импульсной характеристики без нарушения нормального функционирования системы, на что может существенно повлиять регулярная подача на ее вход δ-образных импульсов. Однако при использовании указанного выше взаимнокорреляционного метода измерения импульсной характеристики уровень входного случайного сигнала может быть выбран столь малым, что его влияние на функционирование линейной системы окажется незначительным.

---

[3]) Это справедливо для систем с параметрами, не изменяющимися во времени, при фиксированной задержке τ.

Этот метод успешно реализуется при решении практических инженерных задач в ряде областей, связанных с системами автоматического регулирования, устройствами управления химическими процессами, бортовой аппаратурой измерения характеристик летательных аппаратов и их оборудования и т. д. Одно из наиболее нетрадиционных применений метода связано с непрерывным контролем (регистрацией) импульсной характеристики ядерного реактора с целью анализа степени близости его состояния к критическому, т. е. неустойчивому. Еще одной областью использования данного подхода является анализ динамики поведения крупных зданий при землетрясениях и воздействии сильных кратковременных ветровых нагрузок.

Упражнение 8.5.1. Белый шум воздействует на вход линейной системы, импульсная характеристика которой определена в исходных данных упражнения 8.4.1. Определите значения обеих взаимных корреляционных функций $R_{XY}(\tau)$ и $R_{YX}(\tau)$ входного и выходного процессов для тех же значений τ.
Ответы: 0, 0, 0, 0, 1,25, 1,25.

Упражнение 8.5.2. Импульсная характеристика линейной системы и случайный процесс на ее входе определены в исходных данных упражнения 8.4.2. Определите значения обеих взаимных корреляционных функций при тех же τ.
Ответы: —0,4167, —0,1731, 0,0157, 0,1160, 0,8571, 0,8571.

8.6. Примеры анализа линейных систем во временной области

В разд. 8.4 было показано, что анализ воздействия случайного процесса с экспоненциальной корреляционной функцией на простую RC-цепь связан с выполнением достаточно трудоемких процедур. В самом деле, для таких линейных систем и входных процессов рациональнее использовать методы анализа в частотной области, которые будут рассмотрены в данной главе ниже. Поэтому целесообразно пояснить ряд случаев, когда более предпочтительным оказывается применение методов анализа во временной области. Эти случаи имеют место, когда импульсная характеристика и корреляционная функция имеют простой вид при конечном временном интервале.

В качестве примера рассмотрим линейную систему, называемую *интегратором со сбросом*, импульсная характеристика которого изображена на рис. 8.6, *а*. Предполагается, что на его вход воздействует сигнал с корреляционной функцией, приведенной на рис. 8.6, *б*. Такую корреляционную функцию может иметь, например, двоичный случайный процесс, рассмотренный в разд. 6.2.

Для выбранного вида входного воздействия $X(t)$, математическое ожидание которого $\overline{X}$ равно нулю, процесс $Y(t)$ на выходе интегратора со сбросом будет также иметь нулевое математическое

ожидание. Однако в более общем случае при $\overline{X} \neq 0$ математическое ожидание выходного процесса согласно (8.7) равно

$$\overline{Y} = \overline{X} \int_0^T (1/T)\, dt = \overline{X}. \tag{8.40}$$

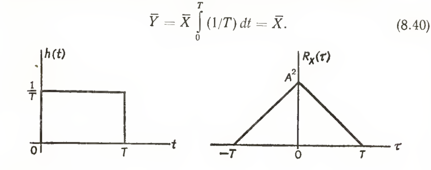
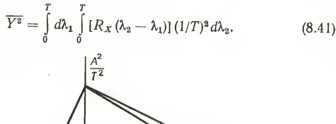


Рис. 8.6. *а* — импульсная характеристика интегратора со сбросом, *б* — корреляционная функция входного воздействия.

Так как рассматриваемый входной случайный процесс не является белым шумом, для определения среднего квадрата выходного процесса следует использовать равенство (8.10). Тогда получим



$$\overline{Y^2} = \int_0^T d\lambda_1 \int_0^T [R_X(\lambda_2 - \lambda_1)]\,(1/T)^2 d\lambda_2. \tag{8.41}$$

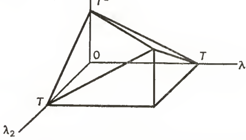


Рис. 8.7. Подынтегральное выражение соотношения (8.41).

Для облегчения процедуры вычисления этого интеграла целесообразно использовать геометрическое представление подынтегральной функции, показанное на рис. 8.7. Следует заметить, что значение среднего квадрата $\overline{Y^2}$ равно объему, ограниченному изображенной геометрической фигурой, состоящей из двух прямоуголь-

ных пирамид, каждая из которых имеет площадь основания, равную $(A^2/T^2)\sqrt{2}T$, и высоту $T/\sqrt{2}$. Очевидно, что общий объем этой фигуры равен

$$\overline{Y^2} = 2\,(1/3)\,(A^2/T^2)\left(\sqrt{2}\,T\right)\left(T/\sqrt{2}\right) = {}^2/_3 A^2. \qquad (8.42)$$

Пользуясь формулой (8.17), можно получить следующее выражение для корреляционной функции выходного сигнала:

$$R_Y(\tau) = \int_0^T d\lambda_1 \int_0^T [R_X(\lambda_2 - \lambda_1 - \tau)]\,(1/T)^2\,d\lambda_2. \qquad (8.43)$$

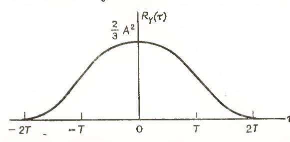


Рис. 8.8. Корреляционная функция случайного сигнала на выходе интегратора со сбросом при воздействии на его вход случайного процесса с корреляционной функцией треугольной формы.

Предоставляем читателю в качестве упражнения доказать, что эта корреляционная функция имеет вид, изображенный на рис. 8.8, и состоит из сегментов кубических парабол.

Следует отметить, что результаты (8.41)—(8.43) существенно упрощаются в случае, если входной процесс $X(t)$ можно считать белым шумом. Так, в частности, выражение (8.12), полученное для случая воздействия белого шума на линейную систему, приводится к виду

$$\overline{Y^2} = S_0 \int_0^T (1/T)^2\,d\lambda = S_0/T, \qquad (8.44)$$

где S_0 — спектральная плотность входного белого шума. Кроме того, из выражения (8.18), справедливого для этого частного случая, следует, что корреляционная функция $R_Y(\tau)$ выходного процесса $Y(t)$ имеет график, изображенный на рис 8.9, так как она по существу представляет собой корреляционную функцию самой импульсной характеристики системы. Заметим, что этот результат является иллюстрацией одного из методов формирования случайного процесса, имеющего корреляционную функцию треугольной формы.

Во втором примере, который связан с оценкой качества фильтрации постоянного напряжения малого уровня на фоне интенсивных шумов, будем использовать результат (8.14). На практике такие ситуации могут возникать в любой системе в случаях необходимости измерения взаимных корреляционных функций двух сигналов, имеющих низкую степень взаимной корреляции. В частности, полагается, что на входе RC-цепи, изображенной на рис. 8.2, действует сигнал $X(t)$, представляющий собой аддитивную смесь постоянного напряжения уровня A и шума $N(t)$ с нулевым математическим ожиданием:

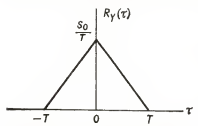


Рис. 8.9. Корреляционная функция случайного сигнала на выходе интегратора со сбросом при воздействии на его вход белого шума.

$$X(t) = A + N(t),$$

где шум $N(t)$ описывается корреляционной функцией вида

$$R_N(\tau) = 10 \exp[-1000|\tau|].$$

Ставится задача измерения величины A со средней квадратической ошибкой, не превышающей 1 % этой величины, и определения постоянной времени RC-фильтра, обеспечивающей заданную точность измерения.

Хотя точное решение этой задачи может быть получено с помощью окончательного результата (8.24), полученного для воздействия случайного процесса с экспоненциальной корреляционной функцией на рассматриваемую RC-цепь, данный подход оказывается неоправданно сложным. Действительно, из чисто физических соображений ясно, что дисперсия шума на выходе фильтра должна быть много меньше дисперсии входного шума, а раз так, то очевидно, что полоса пропускания этого фильтра должна быть много уже спектральной плотности входного шума. При этом, как было показано выше, точность аппроксимации случайного процесса $N(t)$ белым шумом является достаточно высокой.

Первый этап этой аппроксимации должен заключаться в определении спектральной плотности шума вблизи частоты $\omega = 0$, так как RC-фильтр пропускает на его выход только низкочастотные компоненты. Хотя спектральную плотность можно вычислить непосредственно из (8.22), мы будем использовать более общий подход. А именно, выше было установлено, что в соответствии с (7.40) спектральная плотность связана с корреляционной функцией соотношением

$$S_N(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_N(\tau) \exp[-j\omega\tau]\, d\tau,$$

которое при $\omega = 0$ приводится к виду

$$S_N(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_N(\tau)\,d\tau = 2\int_{0}^{\infty} R_N(\tau)\,d\tau. \qquad (8.45)$$

Следовательно, спектральная плотность входного случайного процесса, который мы в данном случае считаем белым шумом (в литературе соответствующий случайный процесс часто называется «эквивалентным белым шумом». — *Перев.*), определяется из равенства $S_N = S_N(0)$. Следует заметить, что (8.45) представляет собой результат общего характера и не зависит от формы корреляционной функции. Для рассмотренного нами частного случая имеем

$$S_N = 2\,(10)\int_{0}^{\infty} \exp\left[-1000\tau\right] d\tau = 20/1000 = 0{,}02.$$

В соответствии с выражением (8.14) значение среднего квадрата процесса $N_o(t)$ на выходе фильтра равно

$$\overline{N_o^2} = bS_N/2 = b\,(0{,}02)/2 = 0{,}01b.$$

Для достижения заданной точности (средняя квадратическая ошибка измерения не должна превышать 1 % A, где A — уровень постоянного напряжения) в частном случае, когда уровень A равен единице, необходимо выполнение неравенства $(\overline{N_o^2})^{1/2} \leqslant (0{,}01)\,(1{,}0)$. Второй сомножитель в правой части этого неравенства равен единице, появление которой обусловлено тем, что коэффициент усиления по напряжению рассматриваемого фильтра равен единице, а следовательно, исходный уровень напряжения $(A = 1)$ воспроизводится на выходе без изменений. Объединяя два последние соотношения, убеждаемся в очевидности неравенства $\overline{N_o^2} = 0{,}01b \leqslant 10^{-4}$, откуда $b \leqslant 10^{-2}$. Так как $b = 1/RC$, для достижения заданной точности измерения постоянная времени RC-цепи должна выбираться из условия $RC \geqslant 10^2$.

Выше было показано, что взаимная корреляционная функция входного и выходного процессов линейной системы является мерой оценки ее импульсной характеристики в случае, если ширина спектральной плотности входного случайного воздействия существенно больше полосы пропускания системы. Обычно алгоритм определения взаимной корреляционной функции, а значит, и импульсной характеристики линейной системы реализуется путем дискретизации входной и выходной временных функций в моменты t_k, последующей временной задержки выборочных значений входной функции и усреднения произведения задержанных выборок входного и выходного сигналов. Структурная схема устройства, реализующего этот алгоритм, приведена на рис. 8.10.

Проанализируем более детально этот метод. С этой целью обозначим выборочные значения входного процесса $X(t)$ как

$$X_k = X(k\,\Delta t), \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

где Δt — период дискретизации. Аналогично обозначим выборочные значения выходного процесса $Y(t)$:

$$Y_k = Y(k\,\Delta t), \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

Оценка n-го выборочного значения взаимной корреляционной функции входного и выходного процессов определяется из выражения



$$\widehat{R}_{XY}(n\,\Delta t) = (N - n + 1)^{-1} \sum_{k=n}^{N} X_{k-n} Y_k, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, M \ll N.$$

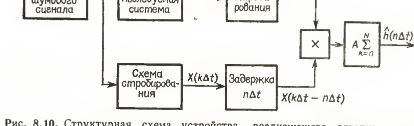


Рис. 8.10. Структурная схема устройства, реализующего алгоритм оценки импульсной характеристики линейной системы.

$$A = [\sigma_X^2 \Delta t\,(N - n + 1)]^{-1}.$$

Чтобы установить соотношение между этой оценкой и оценкой импульсной характеристики линейной системы, необходимо выявить связь дисперсии выборочных значений процесса $X(t)$ с его спектральной плотностью. Если ширина спектральной плотности входного процесса велика, так что его выборочные значения X_k, взятые с шагом Δt секунд, можно считать статистически независимыми, то справедливо допущение о том, что эти выборки являются отсчетными значениями белого шума с ограниченным по полосе спектром, ширина которого W равна $1/2\Delta t$. Так как дисперсия σ_X^2 процесса в виде такого белого шума равна $2S_0W$, имеем $S_0 = \sigma_X^2\,\Delta t$. При этом не имеет значения, какой в действительности вид имеет спектральная плотность процесса $X(t)$, поскольку *независимые* выборки какого-либо процесса неразличимы (т. е. эквивалентны) от независимых выборок белого шума с ограниченной по полосе спектральной плотностью при условии равенства дисперсий этих двух процессов. Таким обра-

зом, в соответствии с (8.36) выражение для оценки импульсной характеристики линейной системы имеет вид

$$\widehat{h}(n\,\Delta t) = (1/\sigma_X^2\,\Delta t)\,\widehat{R}_{XY}(n\,\Delta t) = [1/\sigma_X^2\,\Delta t\,(N-n+1)]\sum_{k=n}^{N} X_{k-n}Y_k,$$

$$n = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ M \ll N. \qquad (8.46)$$

Определив математическое ожидание оценки (8.46), можно непосредственно показать, что она является несмещенной оценкой импульсной характеристики системы. Кроме того, можно убедиться в том, что дисперсия этой оценки является ограниченной величиной:

$$D\,[\widehat{h}(n\,\Delta t)] \leqslant (2/N)\sum_{k=0}^{M} h^2(k\,\Delta t). \qquad (8.47)$$

Часто оказывается более целесообразным перейти в (8.47) от суммирования к интегрированию

$$\sum_{k=0}^{M} h^2(k\,\Delta t) \leqslant (1/\Delta t)\int_0^{\infty} h^2(t)\,dt. \qquad (8.48)$$

Отметим, что граничное значение дисперсии оценки не зависит от того, какая выборка импульсной характеристики оценивается в данный момент $t_k = k\,\Delta t$.

Вышеприведенные результаты представляют интерес и практическую пользу при определении числа выборок входного и выходного сигналов, необходимого для достижения заданной точности оценивания импульсной характеристики. Для пояснения этого предположим, что требуется оценить импульсную характеристику вида

$$h(t) = 5\exp[-5t]\sin 20t\,u(t)$$

со средней квадратической ошибкой, составляющей менее 1 % максимального значения функции $h(t)$. Так как максимальное значение этой импульсной характеристики приблизительно равно 3,376 при $t = 0{,}0785$, дисперсия оценки должна быть меньше $(0{,}01 \times 3{,}376)^2 = 0{,}0011$. С другой стороны, имеем

$$\int_0^{\infty} h^2(t)\,dt = 1{,}25.$$

Таким образом, из (8.47) и (8.48) следует, что число выборок, требуемое для достижения заданной точности, должно удовлетворять неравенству, определяющему нижнюю границу этого числа: $N \geqslant (2 \times 1{,}25)/0{,}0011 \geqslant 2193$.

Выбор интервала Δt определяется как требуемым числом точек M, в которых должно осуществляться оценивание импульсной характеристики $h(t)$, так и длительностью временного интервала, в пределах которого импульсная характеристика имеет достаточно большие значения. Для пояснения этого предположим, что в вышеприведенном примере ставится задача оценки импульсной характеристики в 50 точках временного интервала, в пределах которого уровень импульсной характеристики превышает 1 % ее максимального значения. Так как в выражении для $h(t)$ сомножитель $\sin 20t$ не может превышать единицу, имеем неравенство $5 \exp[-5t] \geqslant 0{,}01 \times 3{,}376$, которое означает, что максимальная временная задержка, которая должна учитываться (и которая должна вводиться в тракт задержки входного сигнала при реализации процедуры оценки), не превышает 1 с. Таким образом, в данном случае вполне приемлемым оказывается период дискретизации $\Delta t = 1/50 = 0{,}02$ с. При этом ширина спектральной плотности идеального белого шума с ограниченным спектром, выборочные значения которого независимы при периоде дискретизации 0,02 с, должна составлять 25Гц. С практической точки зрения, чтобы наверняка гарантировать независимость выборок, целесообразно использовать случайный процесс, ширина спектральной плотности которого для рассматриваемого примера составляет на уровне половинной мощности 250 Гц.

Упражнение 8.6.1. Белый шум с двусторонней спектральной плотностью, равной 0,01, воздействует на вход интегратора со сбросом, имеющего импульсную характеристику

$$h(t) = {}^1/_3\,[u(t) - u(t-3)].$$

Определите значения корреляционной функции выходного сигнала при а) $\tau = 0$, б) $\tau = 1$, в) $\tau = 2$.

Ответы: 0,1111, 0,2222, 0,3333.

Упражнение 8.6.2. Смесь постоянного напряжения A и шума $N(t)$ описывается выражением $X(t) = A + N(t)$, где случайный процесс $N(t)$ имеет корреляционную функцию вида

$$R_N(\tau) = 1 - (|\tau|/0{,}01),\ |\tau| \leqslant 0{,}01.$$

Для измерения уровня постоянного напряжения A (для фильтрации постоянного напряжения на фоне шума) со средней квадратической ошибкой, не превышающей $0{,}02A$, используется интегратор со сбросом, импульсная характеристика которого равна

$$h(t) = (1/T)\,[u(t) - u(t-T)].$$

Определите T, при котором реализуется заданная точность измерения.

Ответ: 25.

8.7. Анализ линейных систем в частотной области

Наиболее широкораспространенный метод анализа и описания линейных систем в частотной области оперирует такими понятиями, как комплексная частотная характеристика системы $H(\omega)$ и передаточная функция системы $H(s)$, представляющие собой

соответственно преобразования Фурье и Лапласа импульсной характеристики. Если $x(t)$ и $y(t)$ — входной и выходной сигналы линейной системы, то их преобразования Фурье $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ связаны соотношением

$$Y(\omega) = X(\omega) H(\omega), \tag{8.49}$$

а преобразования Лапласа — соотношением

$$Y(s) = X(s) H(s) \tag{8.50}$$

при условии, что эти преобразования существуют. Ни одно из этих соотношений не может быть использовано в случае, если $X(t)$ — стационарный случайный процесс. Как было показано в разд. 7.1, преобразование Фурье реализации стационарного случайного процесса в общем случае никогда не существует. Для одностороннего преобразования Лапласа соотношение между входным и выходным сигналами определено только для $t > 0$, а такие функции времени не могут быть реализациями стационарного случайного процесса.

Один из путей преодоления возникающих при этом трудностей связан с использованием спектральной плотности случайного процесса и проведением анализа с помощью усеченной реализации длительности T, для которой предельный переход ($T \to \infty$) осуществляется только после выполнения операции усреднения. Такая процедура правомерна и ведет к математически корректным результатам. Однако существует намного более простая процедура, которая может быть применена на практике. В разд. 7.6 было показано, что спектральная плотность стационарного случайного процесса представляет собой преобразование Фурье его корреляционной функции. Поэтому, используя результаты, полученные для корреляционной функции случайного процесса на выходе линейной системы с постоянными параметрами, посредством необходимых преобразований можем получить соответствующие соотношения и для спектральной плотности. Из вывода основного соотношения очевидна близкая аналогия в выполнении вычислений как для детерминированных, так и для случайных сигналов.

8.8. Спектральная плотность случайного процесса на выходе линейной системы

Спектральная плотность какого-либо случайного процесса является мерой распределения его средней мощности по частотному диапазону и не содержит никакой информации о фазах различных частотных компонент процесса. Как было показано выше, спектральная плотность $S_X(\omega)$ и корреляционная функция $R_X(\tau)$ связаны между собой преобразованием

$$S_X(\omega) = \mathcal{F}\{R_X(\tau)\}. \tag{8.51}$$

Используя (8.51), а также соотношение (8.17), связывающее корреляционные функции $R_Y(\tau)$ и $R_X(\tau)$ соответственно выходного и входного сигналов через импульсную характеристику системы, получим

$$R_Y(\tau) = \int_0^\infty d\lambda_1 \int_0^\infty R_X(\lambda_2 - \lambda_1 - \tau)\, h(\lambda_1)\, h(\lambda_2)\, d\lambda_2,$$

$$S_Y(\omega) = \mathscr{F}\{R_Y(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^\infty d\lambda_1 \int_0^\infty R_X(\lambda_2 - \lambda_1 - \tau)\, h(\lambda_1)\, h(\lambda_2)\, d\lambda_2 \right] \times$$
$$\times \exp[-j\omega\tau]\, d\tau.$$

Изменяя порядок интегрирования и выполняя указанные операции, находим

$$S_Y(\omega) = \int_0^\infty d\lambda_1 \int_0^\infty h(\lambda_1)\, h(\lambda_2)\, d\lambda_2 \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\lambda_2 - \lambda_1 - \tau) \exp[-j\omega\tau]\, d\tau =$$
$$= \int_0^\infty d\lambda_1 \int_0^\infty h(\lambda_1)\, h(\lambda_2)\, S_X(\omega) \exp[-j\omega(\lambda_2 - \lambda_1)]\, d\lambda_2 =$$
$$= S_X(\omega) \int_0^\infty h(\lambda_1) \exp[j\omega\lambda_1]\, d\lambda_1 \int_0^\infty h(\lambda_2) \exp[-j\omega\lambda_2]\, d\lambda_2 =$$
$$= S_X(\omega)\, H(-\omega)\, H(\omega) = S_X(\omega)\, |H(\omega)|^2. \tag{8.52}$$

При выводе выражения (8.52) использовалось свойство четности корреляционной функции, а именно $R_X(-\tau) = R_X(\tau)$.

Из (8.52) следует, что спектральные плотности входного и выходного процессов связаны между собой через квадрат модуля комплексной частотной характеристики системы $|H(\omega)|^2$. Этот результат можно также выразить через комплексную частоту s:

$$S_Y(s) = S_X(s)\, H(s)\, H(-s), \tag{8.53}$$

где $S_Y(s)$ и $S_X(s)$ получены из $S_Y(\omega)$ и $S_X(\omega)$ путем подстановки вида $-s^2 = \omega^2$, а $H(s)$ получено из $H(\omega)$ заменой $j\omega$ на s. Представление именно этого вида будет использоваться в дальнейшем при рассмотрении методов анализа в частотной области.

Из анализа (8.53) очевидно, что произведение $H(s)\, H(-s)$ играет ту же самую роль в установлении соотношения между спектральными плотностями входного и выходного сигналов, что и функция $H(s)$, связывающая между собой преобразования Лапласа этих сигналов. Такая аналогия создает благоприятные предпосылки для использования методов анализа в частотной области систем с рациональными передаточными функциями в слу-

чае, когда входной сигнал является *стационарным случайным процессом*. Однако эти методы не всегда применимы при воздействии на вход линейной системы *нестационарного случайного процесса*, даже если определение его спектральной плотности по форме совпадает с вышеприведенным. Детальное изучение этих вопросов выходит за рамки этой книги, однако полезно проанализировать правомерность применения формулы (8.53) для нестационарных случайных процессов.

Так как нами уже получена формула для спектральной плотности выходного сигнала $Y(t)$ системы, нетрудно определить значение его среднего квадрата:

$$\overline{Y^2} = (1/2\pi j) \int_{-j\infty}^{j\infty} H(s)\, H(-s)\, S_X(s)\, ds, \qquad (8.54)$$

которое может быть вычислено любым из методов, проанализированных в разд. 7.5.

Рис. 8.11. Интегрирующая *RC*-цепь. $H(s) = b/(s + b)$.

Для пояснения приведенных выше результатов рассмотрим *RC*-цепь, изображенную на рис. 8.11, и предположим, что на ее вход воздействует белый шум $X(t)$ со спектральной плотностью S_0. Спектральная плотность выходного сигнала $Y(t)$ определяется как

$$S_Y(s) = [b/(s + b)]\,[b/(-s + b)]\, S_0 = -b^2 S_0/(s^2 - b^2). \qquad (8.55)$$

Средний квадрат выходного сигнала может быть получен с помощью интеграла I_1 из табл. 7.1 (разд. 7.5). С этой целью целесообразно переписать (8.55) в виде

$$S_Y(s) = \left(b\sqrt{S_0}\right)\left(b\sqrt{S_0}\right)/(s + b)(-s + b),$$

откуда следует, что $n = 1$, а полиномы, фигурирующие в табл. 7.1, равны $c(s) = b\,(S_0)^{1/2} = c_0$; $d(s) = s + b$. Таким образом, коэффициенты d_0 и d_1 равны $d_0 = b$, $d_1 = 1$, а интеграл I_1 и, следовательно, средний квадрат $\overline{Y^2}$ составляют

$$\overline{Y^2} = I_1 = c_0^2/2d_0d_1 = b^2S_0/2b = bS_0/2. \qquad (8.56)$$

В качестве более сложного примера рассмотрим случай, когда спектральная плотность входного случайного процесса $X(t)$ равна

$$S_X(s) = -\beta^2 S_0/(s^2 - \beta^2). \qquad (8.57)$$

Данная спектральная плотность соответствует корреляционной функции, введенной в разд. 8.4, и выбрана таким образом, что

на нулевой частоте она равна S_0. При этом спектральная плотность сигнала на выходе RC-цепи определяется как

$$S_Y(s) = [b/(s+b)]\,[b/(-s+b)]\,[-\beta^2 S_0/(s^2-\beta^2)] = \\ = b^2\beta^2 S_0/(s^2-b^2)(s^2-\beta^2). \quad (8.58)$$

Значение среднего квадрата этого сигнала можно вычислить, пользуясь интегралом I_2 из табл. 7.1. С этой целью представим (8.58) в форме

$$S_Y(s) = \frac{c(s)\,c(-s)}{d(s)\,d(-s)} = \frac{\left(b\beta S_0^{1/2}\right)\left(b\beta S_0^{1/2}\right)}{[s^2+(b+\beta)s+b\beta]\,[s^2-(b+\beta)s+b\beta]} \quad (8.59)$$

Отсюда ясно, что $n = 2$, а коэффициенты полиномов $c(s)$ и $d(s)$, фигурирующих в табл. 7.1, равны $c_0 = b\beta\,(S_0)^{1/2}$, $c_1 = 0$, $d_0 = b\beta$, $d_1 = b + \beta$, $d_2 = 1$. Тогда получим

$$\overline{Y^2} = I_2 = \left(c_0^2 d_2 + c_1^2 d_0\right)/2d_0d_1d_2 = b^2\beta^2 S_0/2b\beta\,(b+\beta) = b\beta S_0/2\,(b+\beta). \quad (8.60)$$

Представляет интерес вновь проанализировать полученные здесь результаты в случае, когда ширина спектральной плотности входного случайного процесса много больше полосы пропускания системы, а именно когда $\beta \gg b$. Перепишем выражение (8.58) в виде

$$S_Y(s) = -b^2 S_0/(s^2-b^2)(1-s^2/\beta^2), \quad (8.61)$$

откуда ясно, что по мере роста β эта спектральная плотность стремится к функции, описываемой выражением (8.55), определяющим спектральную плотность случайного процесса на выходе RC-цепи при воздействии на ее вход белого шума. Выражение (8.60) для средн го квадрата можно переписать в виде

$$\overline{Y^2} = bS_0/2\,(1+b/\beta), \quad (8.62)$$

что соответствует при больших β результату (8.56), полученному для воздействия белого шума.

Сравнение этих примеров с аналогичными примерами, при решении которых использовались методы анализа во временной области, свидетельствует о том, что в случаях, когда спектральная плотность входного сигнала и передаточная функция системы являются рациональными функциями, методы анализа в частотной области оказываются более простыми. При этом, чем сложнее анализируемая система, тем более ощутимы преимущества применения этих методов. Если же либо спектральная плотность входного сигнала, либо передаточная функция системы не являются рациональными функциями, то этот вывод может оказаться неправомерным.

Упражнение 8.8.1. Белый шум с двусторонней спектральной плотностью, равной 2 В²/Гц, воздействует на вход линейной системы, имеющей импульсную характеристику вида

$$h(t) = t \exp[-3t]\, u(t).$$

Определите а) значение спектральной плотности выходного процесса при $\omega = 0$, б) значение спектральной плотности выходного процесса при $\omega = 3$, в) значение среднего квадрата выходного процесса.

Ответы: 0,00617, 0,0185, 0,0247.

Упражнение 8.8.2. Для линейной системы, импульсная характеристика которой определена в исходных данных упражнения 8.8.1, найдите значение среднего квадрата выходного процесса при воздействии на ее вход случайного процесса $X(t)$, спектральная плотность которого имеет вид $S_X(\omega) = 1800/(\omega^2 + 900)$.

Ответ: 0,0185.

8.9. Взаимная спектральная плотность случайных процессов на входе и выходе линейной системы

Взаимные спектральные плотности случайных процессов, действующих на входе и выходе линейной системы, широкого применения на практике не находят, но представление о них целесообразно иметь. Вывод соотношений для этих функций осуществляется в соответствии с вышеприведенной общей методикой, поэтому приведем только окончательные результаты. В частности, для пары взаимных спектральных плотностей $S_{XY}(s)$ и $S_{YX}(s)$ имеем

$$S_{XY}(s) = H(s)\, S_X(s), \tag{8.63}$$

$$S_{YX}(s) = H(-s)\, S_X(s). \tag{8.64}$$

Взаимные спектральные плотности находятся точно в таком же соотношении с взаимными корреляционными функциями входного и выходного случайных процессов, в каком находятся обычные спектральные плотности и корреляционные функции, а именно:

$$S_{XY}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) \exp[-s\tau]\, d\tau,$$

$$S_{YX}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{YX}(\tau) \exp[-s\tau]\, d\tau.$$

Аналогично обратное двустороннее преобразование Лапласа может быть использовано для вычисления взаимных корреляционных функций исходя из взаимных спектральных плотностей, однако соответствующие соотношения здесь приведены не будут. Как было отмечено в разд. 7.8, взаимные спектральные плотности не обязательно являются четными функциями ω, вещественными или положительно определенными.

Для пояснения вышеприведенных соотношений вновь рассмотрим RC-цепь (рис. 8.11), на вход которой воздействует белый шум с двусторонней спектральной плотностью S_0. Согласно (8.63) и (8.64), обе взаимные спектральные плотности определяются как

$$S_{XY}(s) = bS_0/(s+b),$$
$$S_{YX}(s) = bS_0/(-s+b).$$

Если эти спектральные плотности путем замены $s = j\omega$ представить как функции ω, то станет очевидным, что данные взаимные спектральные плотности не являются вещественными, четными и положительными функциями частоты ω. Ясно, что аналогичные результаты можно получить и для любой другой спектральной плотности входного процесса.

Упражнение 8.9.1. Белый шум с двусторонней спектральной плотностью, равной 0,5 $В^2$/Гц, воздействует на вход интегратора со сбросом, импульсная характеристика которого есть

$$h(t) = [u(t) - u(t-1)].$$

Определите значения взаимных спектральных плотностей $S_{XY}(s)$ и $S_{YX}(s)$ для а) $\omega = 0$, б) $\omega = 0{,}5$, в) $\omega = 1$.

Ответы: 0,5, $0{,}4794 \pm j0{,}1224$, $0{,}4207 \pm j0{,}2298$.

Упражнение 8.9.2. Два взаимнонезависимых случайных процесса $X(t)$ и $Y(t)$ имеют одинаковые спектральные плотности вида

$$S_X(s) = S_Y(s) = -1/(s^2 - 1).$$

а) Определите взаимные спектральные плотности $S_{XY}(s)$ и $S_{YX}(s)$.

б) Определите взаимные спектральные плотности вида $S_{UV}(s)$ и $S_{VU}(s)$, где случайные процессы $U(t)$ и $V(t)$ определяются как $U(t) = X(t) + Y(t)$ и $V(t) = X(t) - Y(t)$.

Ответы: 0, 0, 0, 0.

8.10. Примеры анализа линейных систем в частотной области

Как отмечалось выше, методы анализа в частотной области оказываются наиболее эффективными в случаях воздействия на простейшие фильтры (являющиеся вариантами линейных систем) случайных процессов со спектральными плотностями, описываемыми рациональными функциями. На практике довольно часто представляется возможность дальнейшего упрощения вычислений, не связанного с возникновением существенных дополнительных ошибок и предполагающего использование идеальных линейных фильтров при воздействии на их входы белого шума. Важным вопросом, связанным с реализацией этой концепции, является введение понятия *эквивалентной шумовой полосы*.

По определению эквивалентная шумовая полоса B системы — это полоса пропускания идеального (с прямоугольной амплитудно-

частотной характеристикой) фильтра, квадрат модуля комплексной частотной характеристики которого равен максимальному значению этого параметра для реального фильтра и значение среднего квадрата выходного сигнала которого равно значению среднего квадрата сигнала на выходе реального фильтра при воздействии на его вход белого шума. Это понятие иллюстрируется рис. 8.12 применительно к низкочастотным и узкополос-

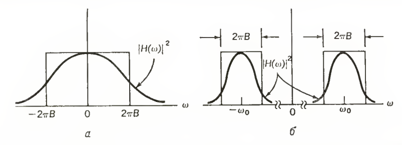


Рис. 8.12. Эквивалентная шумовая полоса: *а* — низкочастотной линейной системы; *б* — высокочастотной узкополосной системы.

ным высокочастотным линейным системам. Ясно, что площади, ограниченные графиками квадратов модулей комплексных частотных характеристик идеального фильтра (график имеет прямоугольную конфигурацию) и реальной линейной системы, должны быть равны при условии равенства средних квадратов процессов на их выходах при воздействии на их входы одного и того же белого шума. Таким образом, для низкочастотной системы эквивалентная шумовая полоса определяется как

$$B = (1/4\pi |H(0)|^2) \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega =$$

$$= (1/4\pi j |H(0)|^2) \int_{-j\infty}^{j\infty} H(s) H(-s) ds \text{ [Гц]}. \quad (8.65)$$

Если на вход такой системы воздействует белый шум со спектральной плотностью S_0, то значение среднего квадрата выходного процесса равно

$$\overline{Y^2} = 2S_0 B |H(0)|^2. \quad (8.66)$$

Для полосового фильтра $|H(0)|^2$ в формулах (8.65) и (8.66) следует заменить на $|H(\omega_0)|^2$.

В качестве примера, иллюстрирующего определение эквивалентной шумовой полосы, рассмотрим RC-цепь, изображенную

на рис. 8.11. Так как интеграл, входящий в формулу (8.65), был вычислен при определении среднего квадрата (8.56), наиболее простым способом решения поставленной задачи является использование уже полученного результата совместно с (8.66). Таким образом, имеем

$$\overline{Y^2} = bS_0/2 = 2S_0B\,|H(0)|^2.$$

Поскольку $|H(0)|^2 = 1$, эквивалентная шумовая полоса равна

$$B = b/4 = 1/4RC. \qquad (8.67)$$

Представляет интерес сравнить эту шумовую полосу с полосой пропускания на уровне половинной мощности, понятие о которой является более распространенным и традиционным. Для низкочастотной системы, в частности, для RC-цепи, выполняющей функцию фильтра нижних частот, полоса пропускания на уровне половинной мощности определяется как граничная частота, выше которой модуль комплексной частотной характеристики меньше $1/\sqrt{2}$ его значения на нулевой частоте. Для RC-фильтра $B_{1/2} = 1/2\pi RC$. Следовательно, для данной системы эквивалентная шумовая полоса в $\pi/2$ раз превышает полосу пропускания на уровне половинной мощности. Чем ближе график модуля комплексной частотной характеристики к прямоугольной конфигурации (т. е. чем круче его ветви), тем больше степень совпадения эквивалентной шумовой полосы и полосы пропускания на уровне половинной мощности.

Можно выразить эквивалентную шумовую полосу не через частотную, а через импульсную характеристику системы. Замечая, что

$$H(0) = \int_0^\infty h(t)\,dt,$$

и применяя теорему Парсеваля к интегралу выражения (8.65), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)\,dt = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2\,d\omega.$$

Используя эти соотношения, можем записать формулу для эквивалентной шумовой полосы

$$B = \int_0^\infty h^2(t)\,dt \Big/ 2\left[\int_0^\infty h(t)\,dt\right]^2. \qquad (8.68)$$

Для систем, описываемых нерациональными комплексными частотными характеристиками или передаточными функциями, представление эквивалентной шумовой полосы во временной

области может оказаться проще, чем в частотной области. Рассмотрим интегратор со сбросом с импульсной характеристикой вида

$$h(t) = (1/T)\ [u(t) - u(t - T)].$$

При этом имеем

$$\int_0^\infty h(t)\,dt = (1/T)\,T = 1, \quad \int_0^\infty h^2(t)\,dt = (1/T^2)\,T = 1/T.$$

Следовательно, эквивалентная шумовая полоса равна $B = (1/T)/2\,(1)^2 = 1/2T$. В данном случае также представляет интерес получение соотношения между эквивалентной шумовой полосой и полосой пропускания интегратора со сбросом на уровне половинной мощности. С помощью преобразования Фурье импульсной характеристики $h(t)$ получим выражение для модуля комплексной частотной характеристики

$$|H(\omega)| = (\sin \omega T)/\omega T,$$

уровень половинной мощности которого соответствует точке (частоте) $B_{1/2} = 0{,}221/T$. Тогда имеем $B = 2{,}26 B_{1/2}$.

Одним из преимуществ использования эквивалентной шумовой полосы является возможность описания отклика даже очень сложных систем при воздействии на них шумов с помощью всего лишь двух параметров B и $|H(\omega_0)|$.

Эти параметры легко определить экспериментальным путем. Пусть, например, в результате экспериментального определения параметров приемника аппаратуры радиосвязи установлено, что его коэффициент усиления по напряжению на частоте настройки равен 10^6, а эквивалентная шумовая полоса 10 кГц. Шум $N(t)$ на входе приемника, компонентами которого являются дробовой и тепловой шумы, имеет спектральную плотность шириной в несколько сотен мегагерц и, следовательно, его можно считать белым шумом в пределах полосы пропускания приемника. Предположим, что спектральная плотность этого шума равна $N_0 = 2 \times 10^{-20}$ В^2/Гц (это реальная величина для входных цепей приемника высокого класса). Каково эффективное значение входного сигнала $X(t)$, при котором обеспечивается выходное отношение сигнал/шум по мощности, равное 100? Ответ на этот вопрос оказывается крайне затруднительным, если пытаться подробно анализировать каждый каскад приемника. Однако задачу можно просто решить, используя эквивалентную шумовую полосу, так как

$$S/N_0 = |H(\omega_0)|^2\,\overline{X^2}/2N_0B\,|H(\omega_0)|^2 = \overline{X^2}/2N_0B, \tag{8.69}$$

где $\overline{X^2}$ — средний квадрат (средняя мощность) входного сигнала, N_0 — спектральная плотность шума на входе приемника.

Таким образом, имеем $\overline{X^2}/2N_0B = 100$, $\overline{X^2} = 2N_0B\,(100)2\cdot 2\cdot 10^{-20}\times \times 10^4\cdot 100 = 4\cdot 10^{-14}$, откуда $(\overline{X^2})^{1/2} = 2\cdot 10^{-7}$ В, что представляет собой искомое эффективное значение напряжения входного сигнала. Заметим, что для определения отношения сигнал/шум на выходе приемника не требовалось знание его коэффициента усиления, хотя он и был задан.

Следует подчеркнуть, что использование эквивалентной шумовой полосы оказывается результативной процедурой только тогда, когда случайный процесс на входе линейной системы можно считать белым шумом. Если спектральная плотность входного процесса не является равномерной (т. е. постоянной) и в значи-

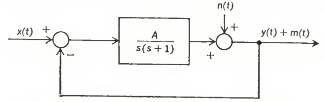


Рис. 8.13. Система автоматического регулирования.

тельной степени изменяется в пределах полосы пропускания системы, то применение данного подхода может привести к заметным ошибкам.

В заключение анализа линейных систем в частотной области рассмотрим систему с обратной связью, структурная схема которой изображена на рис. 8.13. Такой системой может быть устройство управления положением и стабилизации антенны радиолокационной станции, где $x(t)$ — текущая угловая координата цели (она полагается случайной, так как положение цели заранее неизвестно), $y(t)$ — угловое положение (или угол поворота) антенны, изменяющееся при поступлении сигнала управления. Возмущающее воздействие $n(t)$ может учитывать, в частности, влияние ветровых нагрузок на антенну, вследствие чего изменение углового положения антенны представляет собой случайный процесс. Общая передаточная функция звена, состоящего из усилителя и исполнительного двигателя, образующих петлю обратной связи, равна $H(s) = A/s\,(s+1)$. Передаточная функция, связывающая преобразования Лапласа $X(s) = \mathscr{L}[x(t)]$ и $Y(s) = \mathscr{L}[y(t)]$ соответственно входного и выходного сигналов, может быть получена в предположении $n(t) = 0$ и с учетом того, что

$$Y(s) = H(s)\,[X(s) - Y(s)].$$

Последнее соотношение правомерно в силу того, что сигналом на входе усилителя является разность входного управляющего воз-

действия и выходного сигнала системы. Тогда для передаточной функции разомкнутой системы справедливо выражение

$$H_c(s) = Y(s)/X(s) = H(s)/[1 + H(s)] = $$
$$= A/(s^2 + s + A). \qquad (8.70)$$

Если спектральная плотность входного управляющего воздействия, рассматриваемого как случайный процесс, равна $S_X(s) = -2/(s^2 - 1)$, то спектральная плотность выходного сигнала будет иметь вид

$$S_Y(s) = S_X(s)\, H_c(s)\, H_c(-s) =$$
$$= -2A^2/(s^2 - 1)(s^2 + s + A)(s^2 - s + A). \qquad (8.71)$$

При этом значение среднего квадрата выходного сигнала равно

$$\overline{Y^2} = (2A^2/2\pi j) \int\limits_{-j\infty}^{j\infty} \frac{ds}{[s^3 + 2s^2 + (A+1)s + A][-s^3 + 2s^2 - (A+1)s + A]} =$$
$$= 2A^2 I_3,$$

где коэффициенты соответствующих полиномов (табл. 7.1) для интеграла I_3 равны: $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $d_0 = A$, $d_1 = A + 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 1$. В соответствии с табл. 7.1 можно получить

$$\overline{Y^2} = 2A/(A + 2). \qquad (8.72)$$

Передаточная функция, связывающая между собой преобразования Лапласа $N(s) = \mathscr{L}[n(t)]$ и $M(s) = \mathscr{L}[m(t)]$ соответственно входного возмущения $n(t)$ и помехи на выходе системы $m(t)$, отличается от (8.70), так как возмущение приложено в другой точке. Очевидно, что

$$M(s) = N(s) - H(s)\, M(s),$$

с учетом чего получаем выражение для передаточной функции $H_n(s)$:

$$H_n(s) = M(s)/N(s) = 1/[1 + H(s)] = s(s + 1)/(s^2 +$$
$$+ s + A). \qquad (8.73)$$

Пусть возмущающее воздействие имеет спектральную плотность, равную

$$S_N(s) = \delta(s) - [1/(s^2 - 0{,}25)],$$

что соответствует наличию в возмущении как постоянной составляющей, так и случайной компоненты. Тогда спектральная плотность помехи на выходе системы равна

$$S_M(s) = S_N(s)\, H_n(s)\, H_n(-s) = \{\delta(s) - [1/(s^2 - 0{,}25)]\} \times$$
$$\times [s^2(s^2 - 1)/(s^2 + s + A)(s^2 - s + A)]. \qquad (8.74)$$

Значение среднего квадрата помехи на выходе системы можно определить из выражения

$$\overline{M^2} = (1/2\pi j) \int_{-j\infty}^{j\infty} \{\delta(s) - [1/(s^2 - 0{,}25)]\} \times$$

$$\times\ [s^2(s^2-1)/(s^2+s+A)(s^2-s+A)]\,ds.$$

Так как подынтегральное выражение становится равным нулю при $s = 0$, интеграл от $\delta(s)$ не влияет на величину среднего квадрата. Окончательно имеем

$$\overline{M^2} = (1/2\pi j) \times$$

$$\times \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{s(s+1)(-s)(-s+1)\,ds}{[s^3+1{,}5s^2+(A+0{,}5)s+0{,}5A][-s^3+1{,}5s^2-(A+0{,}5)s+0{,}5A]} = I_3.$$

Соответствующие коэффициенты (см. табл. 7.1) равны $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $d_0 = 0{,}5A$, $d_1 = (A + 0{,}5)$, $d_2 = 1{,}5$, $d_3 = 1$. Тогда выражение для среднего квадрата $\overline{M^2}$ приводится к виду

$$\overline{M^2} = (A + 1{,}5)/(2A + 1{,}5). \tag{8.75}$$

В данном примере коэффициент усиления A усилителя специально не был задан, чтобы можно было проанализировать влияние его изменения на характеристики системы. Анализ соотношений (8.72) и (8.75) показывает, что значение среднего квадрата полезного сигнала на выходе системы возрастает при увеличении A, тогда как значение среднего квадрата помехи на выходе системы при этом уменьшается. Таким образом, можно предположить, что если одним из важных критериев считается отношение сигнал/шум на выходе системы, то необходимо обеспечивать большие значения A. В действительности же в ряде случаев более важным фактором может оказаться реакция системы на быстро изменяющиеся входные воздействия, что накладывает ограничения на возможный диапазон изменения коэффициента усиления A.

Упражнение 8.10.1. Определите эквивалентную шумовую полосу системы, модуль комплексной частотной характеристики которой описывается выражением

$$|H(\omega)| = 1/\{1 + [(\omega-\omega_0)^2/B_{1/2}^2]\}^{1/2}.$$

Ответ: $(\pi/2)\,B_{1/2}$.

Упражнение 8.10.2. Определите эквивалентную шумовую полосу системы, импульсная характеристика которой равна

$$h(t) = (1-t)\,[u(t) - u(t-1)].$$

Ответ: 2/3.

ЗАДАЧИ

8.2.1. Квазидетерминированный случайный процесс описывается выражением

$$X(t) = M + B\cos(20t + \theta),$$

где M — случайная величина с гауссовской плотностью вероятностей, математическое ожидание и дисперсия которой соответственно равны 5 и 64; B — случайная величина с рэлеевской плотностью вероятностей и средним квадратом, равным 32; θ — случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[0, 2\pi]$. Все три случайные величины M, B и θ взаимно независимы. Данный случайный процесс воздействует на вход линейной системы, импульсная характеристика которой равна

$$h(t) = 10\exp[-10t]\,u(t),$$

где $u(t)$ — единичная ступенчатая функция.

а) Запишите выражение для случайного процесса на выходе системы.

б) Определите математическое ожидание выходного процесса.

в) Определите значение среднего квадрата выходного процесса.

8.2.2. Ответьте на вопросы, поставленные в задаче 8.2.1, в случае, если импульсная характеристика системы равна

$$h(t) = \delta(t) - 10\exp[-10t]\,u(t).$$

8.3.1. Импульсная характеристика интегратора со сбросом имеет вид

$$h(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant 0{,}5, \\ 0 \text{ при других } t. \end{cases}$$

На вход этого интегратора воздействует белый шум $X(t)$ с двусторонней спектральной плотностью, равной 10 В²/Гц. Определите:

а) математическое ожидание случайного процесса $Y(t)$ на выходе интегратора,

б) значение среднего квадрата выходного процесса,

в) дисперсию выходного процесса.

8.3.2. Ответьте на вопросы, поставленные в задаче 8.3.1, если на вход интегратора со сбросом воздействует стационарный случайный процесс с корреляционной функцией

$$R_X(\tau) = 16\exp[-2|\tau|].$$

8.3.3. Случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией

$$R_X(\tau) = 16\exp[-2|\tau|] + 16$$

воздействует на вход линейной системы, импульсная характеристика которой равна

$$h(t) = \delta(t) - 2\exp[-2t]\,u(t).$$

Определите:

а) математическое ожидание случайного процесса $Y(t)$ на выходе этой линейной системы,

б) значение среднего квадрата выходного процесса,

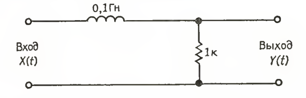
в) дисперсию выходного процесса.

8.3.4. На рисунке представлена эквивалентная схема однокаскадного транзисторного усилителя. Ток, обусловленный внутренними шумами транзистора, обозначен через $i_n(t)$. Полезный сигнал на входе этого устройства имеет вид

$$U_s(t) = 0{,}1 \cos 2000\pi t,$$

ток $i_n(t)$ полагается случайным процессом типа белого шума со спектральной плотностью $2\cdot 10^{-16}$ А²/Гц. Определите отношение среднего квадрата выходного сигнала к среднему квадрату шума (средней мощности) на выходе усилителя.

8.4.1. Белый шум $X(t)$ со спектральной плотностью 10^{-4} В²/Гц, воздействует на вход цепи, изображенной на рисунке.
Определите:

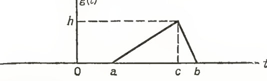


а) корреляционную функцию выходного случайного процесса $Y(t)$,
б) средний квадрат выходного процесса.

8.4.2. Ответьте на вопросы, поставленные в задаче 8.4.1, если на вход системы воздействует стационарный случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией

$$R_X(\tau) = 2 \exp[-5000|\tau|].$$

8.4.3. Цель данной задачи заключается в получении достаточно общего результата, касающегося анализа линейных систем многих типов. На примере



временной функции треугольной формы, изображенной на рисунке, докажите справедливость равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)\,dt = (1/3)\,h^2(b-a)$$

для любой треугольной функции при условии, что $a \leqslant c \leqslant b$.

8.4.4. На вход линейной системы с импульсной характеристикой

$$h(t) = [1-t]\,[u(t) - u(t-1)]$$

воздействует случайный процесс $X(t)$, имеющий корреляционную функцию

$$R_X(\tau) = 2\delta(\tau) + 9.$$

Определите:

а) математическое ожидание случайного процесса $Y(t)$ на выходе этой системы,

б) значение среднего квадрата выходного процесса,

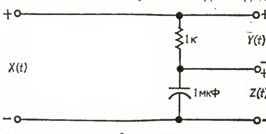
в) корреляционную функцию выходного процесса.

8.5.1. Для линейной системы и входного случайного воздействия, определенных в исходных данных задачи 8.3.1, определите обе взаимные корреляционные функции $R_{XY}(\tau)$ и $R_{YX}(\tau)$ (см. разд. 8.5) входного и выходного случайных процессов.

8.5.2. Для линейной системы и входного воздействия, определенных в исходных данных задачи 8.3.2, определите обе взаимные корреляционные функции входного и выходного случайных процессов.

8.5.3. Для линейной системы и входного воздействия, определенных в исходных данных задачи 8.4.4, определите обе взаимные корреляционные функции входного и выходного случайных процессов.

8.5.4. На вход цепи, изображенной на рисунке, воздействует белый шум $X(t)$ со спектральной плотностью 0,1 В²/Гц. Определите взаимную корреляционную функцию R_{YZ} двух выходных процессов $Y(t)$ и $Z(t)$ для всех τ.



8.6.1. На вход интегратора со сбросом, импульсная характеристика которого равна

$$h(t) = (1/T)\,[u(t) - u(t-T)],$$

воздействует стационарный случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией вида

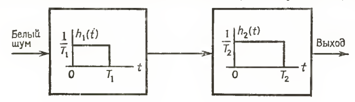
$$R_X(\tau) = \begin{cases} A^2[1 - |\tau|/T], & |\tau| \leqslant T, \\ 0 & \text{при других } |\tau|. \end{cases}$$

Определите:

а) значение среднего квадрата случайного процесса $Y(t)$ на выходе интегратора,

б) корреляционную функцию выходного процесса.

8.6.2. Белый шум со спектральной плотностью 0,001 В²/Гц воздействует на вход линейной цепи, представляющей собой последовательное соединение двух интеграторов со сбросом, как показано на рисунке. Определить дисперсию



случайного процесса на выходе этой цепи для следующих значений T_1 и T_2: а) $T_1 = T_2 = 0{,}1$, б) $T_1 = 0{,}1$, $T_2 = 0{,}01$, в) $T_1 = 0{,}1$, $T_2 = 1$.

8.6.3. Требуется получить оценку $\widehat{\overline{X}}$ математического ожидания стационарного случайного процесса $X(t)$ путем усреднения N выборочных значений $X_n = X(n\,\Delta t)$, $n = 1, 2, \ldots, N$ этого процесса, т. е. необходимо вычислить

$$\widehat{\overline{X}} = (1/N) \sum_{n=1}^{N} X_n.$$

Выведите общую формулу для дисперсии этой оценки при условии, что

а) выборочные значения взаимно некоррелированы,

б) период дискретизации (интервал между соседними выборками) равен Δt, а сам случайный процесс, которому соответствуют эти выборочные значения, имеет корреляционную функцию $R_X(\tau)$.

8.6.4. Требуется получить оценку импульсной характеристики некоторой линейной системы путем дискретизации входного и выходного сигналов этой системы и вычисления взаимной корреляционной функции выборочных значений данных сигналов (см. разд. 8.6). Выборочные значения входного сигнала взаимно независимы и имеют дисперсию, равную 2. Импульсная характеристика системы имеет вид

$$h(t) = 10t \exp[-20t]\, u(t).$$

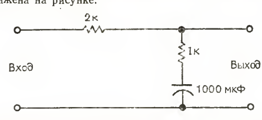
Оценка функции $h(t)$ должна быть определена по 60 выборкам во временном диапазоне, в пределах которого импульсная характеристика превышает 2 % ее максимального значения. Определите:

а) временной интервал между соседними выборками,

б) требуемое число выборок, обеспечивающее оценку импульсной характеристики со средней квадратической ошибкой, меньшей 1 % максимального значения функции $h(t)$.

в) общие затраты времени, требуемые для осуществления этих измерений.

8.7.1. а) Определите передаточную функцию $H(s)$ линейной системы, схема которой изображена на рисунке.



б) При условии, что на вход данной линейной системы воздействует сигнал, преобразование Лапласа которого имеет вид

$$X(s) = s/(s+4),$$

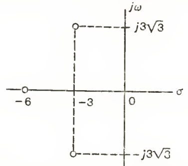
определите квадрат модуля $|Y(s)|^2$ преобразования Лапласа сигнала на ее выходе.

8.7.2. Трехполюсный фильтр Баттерворта имеет полюсы, изображенные на рисунке. Коэффициент передачи фильтра на частоте $\omega = 0$ равен единице.

а) Запишите выражение для комплексной частотной характеристики $H(\omega)$ этого фильтра.

б) Запишите выражение для квадрата модуля комплексной частотной характеристики $|H(\omega)|^2$.

в) Найдите квадрат модуля передаточной функции $|H(s)|^2$ этого фильтра.



8.8.1. Для линейной системы, схема и значения параметров элементов которой приведены на рисунке к задаче 8.7.1, определите спектральную плотность процесса на ее выходе, если на вход системы воздействуют

а) белый шум со спектральной плотностью, равной 0,5 В²/Гц,

б) случайный процесс $X(t)$ со спектральной плотностью

$$S_X(\omega) = \omega^2/(\omega^4 + 5\omega^2 + 4).$$

8.8.2. На вход фильтра Баттерворта, параметры которого заданы в исходных условиях задачи 8.7.2, воздействует случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией

$$R_X(\tau) = 10 \exp[-|\tau|].$$

а) Запишите выражение для спектральной плотности выходного процесса $Y(t)$.

б) Вычислите значение этой спектральной плотности на частоте $\omega = 0$.

8.8.3. На вход линейной системы, имеющей передаточную функцию вида

$$H(s) = s/(s^2 + 15s + 50),$$

воздействует белый шум, спектральная плотность которого равна 1,2 В²/Гц.

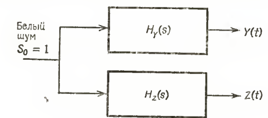
а) Запишите выражение для спектральной плотности случайного процесса на выходе этой линейной системы.

б) Вычислите значение среднего квадрата выходного процесса.

8.8.4. Белый шум со спектральной плотностью 0,8 В²/Гц воздействует на вход фильтра Баттерворта, параметры которого заданы в исходных условиях задачи 8.7.2. Определите значение среднего квадрата случайного процесса на выходе этого фильтра.

8.9.1. Для линейной системы и случайного входного воздействия, заданных в исходных условиях задачи 8.8.2, определите обе взаимные спектральные плотности $S_{XY}(s)$ и $S_{YX}(s)$ входного $X(t)$ и выходного $Y(t)$ случайных процессов.

8.9.2. Для линейной системы, изображенной на рисунке, выведите выражения для взаимных спектральных плотностей $S_{YZ}(s)$ и $S_{ZY}(s)$ случайных процессов $Y(t)$ и $Z(t)$.



8.9.3. Пусть для системы, изображенной на рисунке к задаче 8.9.2, передаточные функции $H_Y(s)$ и $H_Z(s)$ равны

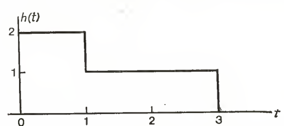
$$H_Y(s) = 1/(s+1), \qquad H_Z(s) = s/(s+1).$$

Определите обе взаимные спектральные плотности $S_{YZ}(s)$ и $S_{ZY}(s)$ случайных процессов $Y(t)$ и $Z(t)$.

8.10.1. а) Определите эквивалентную шумовую полосу трехполюсного фильтра Баттерворта, параметры которого заданы в исходных условиях задачи 8.7.2.

б) Определите полосу пропускания этого фильтра Баттерворта на уровне половинной мощности и сравните с эквивалентной шумовой полосой.

8.10.2. Импульсная характеристика линейной системы изображена на рисунке.

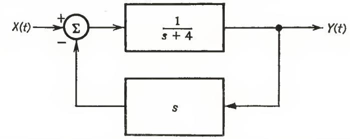


а) Определите эквивалентную шумовую полосу этой системы.

б) Используя частотный метод анализа, определите значение среднего квадрата случайного процесса на выходе системы при воздействии на ее вход белого шума со спектральной плотностью 2 В²/Гц.

в) Повторите выполнение п.б с помощью интеграла от квадрата импульсной характеристики $h^2(t)$ (см. разд. 8.10).

8.10.3. а) Определите передаточную функцию замкнутой системы автоматического регулирования, изображенной на рисунке.



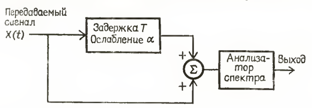
б) Определите значение среднего квадрата процесса $Y(t)$ на выходе этой системы при воздействии на ее вход стационарного случайного процесса $X(t)$ со спектральной плотностью $S_X(s) = 10/(s+2)$.

в) Для случайного входного воздействия, заданного в п. б, определите значение среднего квадрата сигнала ошибки $X(t) - Y(t)$.

8.10.4. Селективный усилитель на частоте 10,7 МГц имеет коэффициент усиления и полосу пропускания на уровне половинной мощности соответственно 40 дБ и 1 МГц. Импульсная характеристика усилителя аналогична импульсной характеристике одиночного RLC-контура. Установлено, что вследствие действия на входе усилителя теплового шума на его выходе формируется случайный

сигнал со средним квадратическим отклонением 0,1 В. Определите спектральную плотность входного теплового шума.

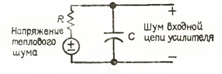
8.10.5. Предложено для измерения дальности до отражающего объекта осуществлять излучение на несущей частоте f_0 сигнала, представляющего собой белый шум с ограниченным по полосе спектром, с последующим суммированием излученного и принятого сигналов и измерением спектральной плотности этой суммы. Период следования максимумов спектральной плотности зависит от дальности до объекта. Используя модель системы, изображенную на рисунке,



проанализируйте возможность применения предложенного метода при условии, что величина α^2 пренебрежимо мала по сравнению с α. Какой эффект, неблагоприятно влияющий на процедуру измерения, не был учтен в этой модели системы?

8.10.6. Часто оказывается целесообразным аппроксимировать квадрат модуля комплексной частотной характеристики реального линейного фильтра гауссовской кривой. Определите среднее квадратическое отклонение как параметр этой аппроксимирующей кривой применительно к фильтру нижних частот, для которого максимальное значение квадрата модуля комплексной частотной характеристики равно единице, а полоса пропускания на уровне половинной мощности равна W Гц. Выразите эквивалентную шумовую полосу такого гауссовского фильтра через его полосу пропускания на уровне половинной мощности и среднее квадратическое отклонение соответствующей гауссовской кривой.

8.10.7. Тепловой шум, возбуждаемый в резисторе, достаточно точно может быть аппроксимирован белым шумом со спектральной плотностью $2kTR$ В²/Гц, где k — постоянная Больцмана ($1{,}37 \cdot 10^{-23}$ Дж/К), T — абсолютная температура в кельвинах, R — сопротивление в омах. В схемах реальных усилителей любой резистор по существу шунтирован включенной параллельно ему емкостью, в соответствии с чем эквивалентная схема резистора приобретает вид, представленный на рисунке.



а) Рассчитайте значение среднего квадрата шума на входе усилителя и покажите, что оно не зависит от сопротивления R.

б) Объясните этот результат с физической точки зрения.

в) Покажите, что максимальная мощность шума (это соответствует использованию согласованной нагрузки), возбуждаемого в резисторе, равна kTB, где B — эквивалентная шумовая полоса, в пределах которой измеряется мощность.

8.10.8. Любой сигнал на входе усилителя всегда сопровождается шумами. Минимально возможный уровень шумов определяется всегда присутствующим тепловым шумом, обусловленным активной составляющей входного сопротивления, как показано в задаче 8.10.7. В общем случае усилитель вносит до-

полнительные шумы в процессе усиления сигналов. Уровень шумов характеризует степень уменьшения отношения сигнал/шум при прохождении сигнала через усилитель. Общепринято называть этот показатель усилителя коэффициентом шума, определяемым как

$$F = \frac{\text{отношение сигнал/шум на входе}}{\text{отношение сигнал/шум на выходе}}.$$

а) Исходя из этого определения, покажите, что общий коэффициент шума двухкаскадного усилителя равен $F = F_1 + (F_2 - 1)/G_1$, где G_1 и G_2 — коэффициенты усиления по мощности соответственно 1-го и 2-го каскадов усилителя, F_1 и F_2 — коэффициенты шума 1-го и 2-го каскадов.

б) Широкополосный видеоусилитель, эквивалентная схема входной цепи которого соответствует схеме, представленной на рисунке для задачи 8.10.7, имеет следующие параметры: полосу пропускания на уровне половинной мощности 100 МГц, коэффициент усиления 100 дБ, коэффициент шума 13 дБ, входное и выходное сопротивления 300 Ом. Определите среднеквадратическое значение выходного шумового напряжения в отсутствие входного полезного сигнала. (Спектральная плотность входного шума дается в условии задачи 8.10.7.)

в) Вычислите амплитуду входного синусоидального сигнала, необходимую для получения на выходе усилителя отношения сигнал/шум 10 дБ.

ЛИТЕРАТУРА

Рекомендуется обратиться к списку литературы, приведенной в гл. 1. Особый интерес для материала данной главы представляют книги [3, 7]. В качестве источника при изучении вопросов, связанных с анализом систем, может быть рекомендовано следующее издание:

McGillem C. D., Cooper G. R. Continuous and Discrete Signal and System Analysis. Second Edition. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1984.

Глава 9

Оптимальные линейные системы

9.1. Введение

В предыдущих главах отмечалось, что почти во всех системах, используемых на практике, наряду с полезным сигналом имеют место случайные возмущения. Присутствие этих возмущений приводит к тому, что форма и уровень сигнала на выходе системы отличаются, и в ряде случаев в значительной степени, от его номинальных параметров. В таких случаях, естественно, возникает вопрос: можно ли каким-нибудь образом видоизменить данную систему так, чтобы уменьшить влияние этих возмущений? Оказывается, что обычно представляется возможным выбрать такую импульсную характеристику системы или ее комплексную частотную характеристику (передаточную функцию), которые минимизируют некоторые характерные признаки возмущений на выходе системы. При этом систему называют *оптимальной*.

Исследование оптимальных систем для разных видов полезных сигналов и широкого класса шумовых возмущений и помех связано с большими сложностями из-за значительного разнообразия физических ситуаций, в которых возникают различные сигналы и возмущения. Литература по данному вопросу достаточно обширна, а методы, используемые для определения структуры (т. е. синтеза) оптимальной системы, достаточно общие (универсальные) и высокорезультативные при всей их сложности, выходят за рамки рассматриваемого материала. Тем не менее целесообразно ввести некоторые термины и пояснить ряд вопросов постановочного, концептуального характера с тем, чтобы читатель представлял себе возможности этих методов и испытывал меньшие затруднения при знакомстве с соответствующей литературой.

Один из первых этапов изучения оптимальных систем состоит в точном определении самого понятия оптимальности. Существует много различных критериев оптимальности, поэтому при выборе подходящего критерия необходимо соблюдать осторожность. Эти вопросы будут рассмотрены в разд. 9.2.

Следующий этап, который предполагает, что некоторый критерий оптимальности уже выбран, заключается в определении физической природы анализируемой системы. Здесь также воз-

никает возможность выбора, от правильности которого в значительной, а иногда и в решающей степени зависит простота процедуры оптимизации. Особенности этого этапа кратко рассматриваются в разд. 9.3.

После того как определена структура оптимальной системы, остается нерешенной задача оценки ее характеристик (т. е. задача *анализа оптимальной системы*). В ряде случаев эта задача решается достаточно просто, в других же ситуациях ее решение может оказаться сложнее синтеза системы. В рамках рассматриваемого материала не предпринимается попытка выполнения общего обзора методов анализа — каждый случай должен анализироваться отдельно.

В задачах, возникающих в инженерной практике, последний этап заключается в решении вопроса: возможна ли практическая реализация (в том числе и с экономической точки зрения) оптимальной системы или необходимы упрощенные ее варианты. Если окажется, а зачастую именно эта ситуация и имеет место, что не представляется возможным реализовать действительно оптимальную систему, то резонно возникает сомнение относительно практической значимости методов оптимизации. Однако, как это ни удивительно, оптимизация очень часто оказывается высокоэффективной и целесообразной с практической точки зрения операцией, даже если отсутствуют намерение или прямая необходимость построения оптимальной системы. Причина в том, что характеристики оптимальной системы представляют собой критерий и меру, относительно которых могут быть выполнены оценка и сравнение характеристик любых реальных систем. Так как любая реальная система по своим параметрам не может превзойти оптимальную систему этого же типа, их сравнение дает ясный ответ на вопрос: есть ли необходимость в дальнейшем совершенствовании реальной системы или же ее показатели настолько близки к характеристикам оптимальной системы, что дальнейшее их улучшение неоправданно, в том числе с экономической точки зрения? Вероятно, именно возможность такого сравнения является основным доводом в пользу исследования оптимальных систем, так как действительно оптимальные в полном смысле этого слова системы могут быть реализованы практически только в очень редких случаях.

9.2. Критерии оптимальности

Так как существует значительное число критериев оптимальности, из которых может быть сделан выбор, необходимо установить основные факторы, определяющие целесообразность использования того или иного критерия. Прежде всего необходимо, чтобы критерий удовлетворял ряду требований.

1. Критерий оптимальности должен иметь физический смысл, а его применение не должно приводить к очевидным результатам. Например, если в качестве критерия оптимальности был бы выбран критерий минимума (минимизации) мощности шума на выходе системы, то очевидно, что в результате мы получили бы систему, на выходе которой как полезный сигнал, так и шум имеют нулевые значения. Ясно, что это тривиальный результат. С другой стороны, если формулировку критерия минимума мощности выходного шума дополнить словами «при заданной мощности полезного сигнала на выходе», то он может оказаться вполне приемлемым.

2. Следствием применения критерия оптимальности должна быть единственность и однозначность решения поставленной задачи. Например, критерий с формулировкой «*математическое ожидание ошибки* воспроизведения выходного сигнала системой должно быть равно нулю» может быть реализован с помощью многих систем, далеко не равнозначных в отношении получаемой при этом *дисперсии* данной ошибки.

3. Критерий оптимальности должен приводить к математическим соотношениям и алгоритмам, поддающимся решению. Это требование оказывается весьма строгим и является главной причиной, обусловливающей широкое применение на практике лишь очень незначительного числа критериев. Вследствие этого выбор критерия часто осуществляется с учетом в первую очередь именно этого требования, даже если в данной ситуации могли бы быть более целесообразными некоторые другие критерии.

На выбор критерия оптимальности часто влияет физическая природа входного сигнала, а именно является ли этот сигнал детерминированным или случайным. Причина различия такого рода заключается в том, что обычно применительно к этим двум разным по характеру сигналам используются и системы, имеющие разное назначение. В частности, если входной сигнал является детерминированным, т. е. с известными параметрами, то задача его наблюдения (приема) заключается либо в установлении факта его наличия или отсутствия (задача обнаружения), либо в определении момента времени прихода сигнала, либо в измерении его уровня и т. д. С другой стороны, если сигнал является случайным, т. е. его параметры не известны, то назначение системы, на вход которой он воздействует, состоит в определении этих параметров с максимальной достоверностью. В любом из этих двух случаев может иметь смысл применение ряда критериев, однако для каждого из них будет рассмотрено только по одному критерию, наиболее общепринятому и простому с математической точки зрения.

Для детерминированных сигналов в качестве критерия оптимальности используется критерий *максимизации* (максимума) от-

ношения сигнал/шум по мощности на выходе системы в фиксированный момент времени. Этот критерий особенно эффективен для систем, предназначенных для обнаружения сигнала известной формы или определения момента прихода такого сигнала. Этот критерий обладает определенной гибкостью в отношении выбора момента времени, для которого должно обеспечиваться максимальное отношение сигнал/шум, однако обычно физическая природа и структура сигнала диктуют разумный выбор этого параметра.

Применительно к случайным сигналам в качестве критерия оптимальности будет рассмотрен критерий *минимизации* (минимума) среднего квадрата разности между выходным сигналом системы и истинным значением принимаемого полезного сигнала. Этот критерий особенно эффективен, когда система должна быть предназначена для приема сигналов с неизвестными параметрами и последующего их измерения, а также решения задачи управления. Разность между выходным сигналом системы и истинным значением входного полезного сигнала состоит из двух компонент. Одна из них, представляющая собой *сигнальную ошибку*, равна разности между входным и выходным сигналами в отсутствие шумов на входе системы. Второй компонентой является выходной шум, одновременно представляющий собой *ошибку воспроизведения* выходного полезного сигнала. Общая ошибка равна сумме этих компонент, а минимизируемой величиной является средний квадрат этой общей ошибки.

Рассмотрим несколько примеров с целью пояснения введенных выше критериев и для иллюстрации ситуаций, в которых они могут быть применены. Критерий максимума отношения сигнал/шум на выходе очень широко используется в радиолокационных системах. В радиолокационных системах осуществляется периодическое излучение радиоимпульсов очень малой длительности; принимаемый сигнал представляет собой одну или несколько копий зондирующего сигнала, которые формируются за счет отражения последнего облучаемыми объектами. Таким образом, форма принимаемого сигнала оказывается известной. Признаками, неизвестными в отношении принимаемого сигнала, являются: число отраженных сигналов, временное запаздывание между моментами приема и излучения сигналов, амплитуда принимаемого сигнала и даже факт его наличия или отсутствия. Используя методы, которые выходят за рамки рассматриваемого материала, можно показать, что вероятность обнаружения слабого радиолокационного сигнала в условиях воздействия шумов или помех максимальна при максимальном отношении сигнал/шум. Таким образом, критерий максимума отношения сигнал/шум соответствует задачам, решение которых возложено на радиолокационные системы.

Аналогичная ситуация возникает в цифровых системах радиосвязи. В этих системах передаваемое сообщение преобразуется в последовательность двоичных символов, условно обозначаемых 0 и 1. Затем каждый из этих двоичных символов представляется в виде временной функции определенной формы. Например, отрицательный прямоугольный импульс может представлять собой условный нуль, а положительный прямоугольный импульс — условную единицу. При этом важно, чтобы в приемном устройстве принимались правильные решения относительно истинной полярности (положительной или отрицательной) принимаемых импульсов, однако реализация процедуры принятия правильных решений может оказаться непростой при наличии интенсивных шумов. И в этом случае вероятность принятия правильного решения максимизируется путем максимизации отношения сигнал/шум.

С другой стороны, на практике существует много типов сигналов, форма и другие параметры которых не известны вплоть до момента приема, когда осуществляется их наблюдение на фоне шумов. Например, в аналоговых системах радиосвязи сообщения (речь, музыкальные программы) не преобразуются в двоичную форму, а передаются в исходном виде после осуществления модуляции соответствующего типа. В приемном устройстве необходимо восстановить сообщение с минимально возможными отклонениями от исходного сообщения. В данном случае наиболее целесообразным оказывается критерий минимума средней квадратической ошибки между принимаемым и переданным сообщениями. Примером другой ситуации, когда наиболее эффективным является данный критерий, является измерение параметров биологических сигналов, осуществляемое при снятии электроэнцефалограмм и электрокардиограмм. При этом большое значение имеют точное воспроизведение данных сигналов и предельно возможная минимизация влияния шумов.

Итак, вышеприведенные рассуждения в более сжатой форме можно резюмировать в виде следующих выводов, в общем случае справедливых на практике:

а) При определении факта наличия или отсутствия сигнала с известными параметрами и известной формы целесообразно использовать критерий максимума отношения сигнал/шум на выходе системы.

б) Для измерения параметров сигнала, наличие которого установлено, целесообразно использовать критерий минимума среднего квадрата ошибки.

Естественно, на практике возникают ситуации, для которых не применим ни один из вышерассмотренных критериев, однако эти вопросы выходят за рамки предлагаемого материала.

Упражнение 9.2.1. Для каждой из следующих ситуаций установите, какой из двух критериев оптимальности должен быть применен:

критерий максимума отношения сигнал/шум или критерий минимума среднего квадрата ошибки:

а) прием шумовых сигналов удаленных звезд, излучающих в радиодиапазоне,

б) прослушивание музыкальных программ, записанных с помощью традиционных систем,

в) прослушивание музыкальных программ, записанных с помощью цифровых систем,

г) линии связи между ЭВМ,

д) использование радиотелефона,

е) обнаружение трещин в отливках с помощью ультразвуковых обнаружителей механических дефектов.

Ответы: 1, 1, 1, 1, 2, 2.

9.3. Ограничения оптимальных систем

Обычно возникает необходимость ограничить класс допустимых систем. Ограничение наиболее общего характера заключается в том, что система должна быть *каузальной* [1]) (дословно это означает существование причинно-следственных связей в системе во времени. — *Перев.*), так как это фундаментальное требование связано с физической реализуемостью (физической осуществимостью) системы. Часто оказывается справедливой ситуация, когда некаузальная система, выходной сигнал которой может представлять собой отклик на будущие значения входного сигнала, лучше удовлетворяет выбранному критерию, чем любая физически реализуемая система. Однако обычно некаузальная система не может быть реализована и, кроме того, такая система не дает возможности приемлемого сравнения с реальной системой, что не может нас удовлетворить. Возможное исключение из этого правила связано с ситуацией, когда осуществляется запись процессов, протекающих в системе, а значит, имеется возможность использования соответствующих будущих значений.

Другое ограничение (допущение) общего характера связано с *линейностью* системы. Основная причина использования этого допущения заключается в том, что обычно не представляется возможным решить задачу аналитически для оптимальной нелинейной системы. Можно показать, что в значительном числе случаев, особенно при наличии гауссовских шумов, не существует нелинейных систем, которые имеют преимущества по сравнению с применением оптимальных линейных систем. Однако в более общем случае линейная система может уступать по своим характеристикам нелинейной системе. Тем не менее трудности, связанные с определением структуры и анализом оптимальной нелинейной си-

---

[1]) Под *каузальностью* мы понимаем, что импульсная характеристика такой системы удовлетворяет условию $h(t) = 0$, $t < 0$ (см. (8.3)), а также условию *устойчивости* (8.4).

стемы, таковы, что часто эти процедуры оказываются трудно-реализуемыми.

При современном уровне технологии все более широко реализуются и применяются цифровые варианты аналоговых систем. Это исключает необходимость использования громоздких емкостных и индуктивных элементов, за счет чего уменьшаются масса и габариты оптимальной системы. Кроме того, оказывается возможным реализовать системы, которые были бы слишком сложными и дорогостоящими при их исполнении в аналоговом варианте. Вопросы реализации таких цифровых систем выходят за рамки нашего обсуждения, однако читатель должен иметь представление о том, что в принципе действительно возможны цифровые варианты очень сложных систем, но их реализация всегда связана с возникновением ошибок как вследствие дискретизации аналоговых сигналов, так и в результате квантования их амплитуд. Таким образом, проводимый в последующих разделах анализ ошибок, возникающих в аналоговых системах, не отражает в необходимой степени характера ошибок, имеющих место в их цифровых вариантах.

Если выбран приемлемый и оправданный с физической точки зрения критерий оптимальности, а система (синтез или анализ которой должны быть выполнены) ограничена классом каузальных и линейных систем, то можно определить импульсную характеристику либо комплексную частотную характеристику (или передаточную функцию), соответствующие выбранному критерию оптимальности. Однако в ряде случаев целесообразно осуществить сужение класса рассматриваемых систем за счет введения дополнительных ограничений. Причина введения этих ограничений заключается в реализации при этом системы с заданным уровнем сложности (а значит, и стоимости), тогда как более общие методы оптимизации позволяют получить систему, являющуюся либо дорогостоящей, либо сложной при практической реализации ее цифрового варианта. Пример такого метода оптимизации будет рассмотрен в следующем разделе.

9.4. Оптимизация систем путем подбора их параметров

Как говорит само название раздела, данный метод оптимизации реализуется путем задания структуры используемой системы и определения параметров ее компонентов, оптимизирующих выбранный критерий, т. е. реализующих выбранный критерий оптимальности. Этот метод имеет очевидное преимущество, связанное с анализом систем, уровень сложности которых задан, и, следовательно, наиболее применим в случаях, когда первостепенное значение имеет именно фактор сложности систем, что непосредственно связано с их габаритами, массой и стоимостью.

Недостаток этого метода оптимизации состоит в том, что реализуемые с его использованием оптимальные системы всегда уступают по своим характеристикам оптимальным системам более широкого класса, на которые заранее не накладывается ограничение, связанное с заданием их структуры. Любые попытки улучшения характеристик систем с заданной структурой путем перебора систем, имеющих несколько более высокий уровень сложности, связаны с трудностями их аналитического математического описания при определении оптимальных значений более чем одного параметра (так как системы уравнений, которые

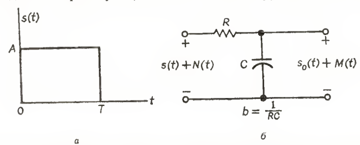


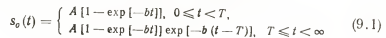
Рис. 9.1. Форма сигнала и система, максимизирующая отношение сигнал/шум: *а* — обнаруживаемый сигнал, *б* — частный вариант оптимальной системы.

должны быть решены для их определения, в редких случаях являются линейными), хотя вполне возможны численные методы решения соответствующих уравнений на ЭВМ. На практике методы аналитического решения обычно ограничиваются случаем одного параметра. С целью пояснения сути данного метода оптимизации рассмотрим два примера.

В качестве первого примера предположим ситуацию, когда наблюдается аддитивная смесь прямоугольного импульса, изображенного на рис. 9.1, *а*, и белого шума со спектральной плотностью N_0. В силу того что форма сигнала известна, оптимальная система должна быть предназначена для обнаружения этого сигнала на фоне шума. Как было отмечено выше, при этом в качестве наиболее целесообразного критерия оптимальности должен быть выбран критерий максимума отношения сигнал/шум по мощности в некоторый момент времени на выходе этой системы. Это означает, что если $s_0(t)$ — полезный выходной сигнал, а $M(t)$ — выходной шум, средний квадрат которого равен $\overline{M^2}$, то требуется получить оптимальную систему, максимизирующую отношение $s_0^2(t_0)/\overline{M^2}$, где t_0 — момент времени, соответствующий максимуму этого отношения.

В методе подбора параметров структура системы считается заданной. Пусть в данном примере это будет простая *RC*-цепь,

изображенная на рис. 9.1, *б*. Параметром, для которого должно быть выбрано оптимальное значение, является постоянная времени RC-фильтра $\tau_c = RC$ или обратная ей величина $b = 1/\tau_c = 1/RC$. Один из первых этапов решения этой задачи состоит в выборе момента времени t_0, соответствующего максимуму отношения сигнал/шум. Выбор требуемой величины t_0 очевиден из анализа структуры полезного сигнала на выходе системы. Этот сигнал описывается выражением



$$s_0(t) = \begin{cases} A\,[1-\exp[-bt]], & 0 \leqslant t < T, \\ A\,[1-\exp[-bt]]\exp[-b(t-T)], & T \leqslant t < \infty \end{cases} \quad (9.1)$$

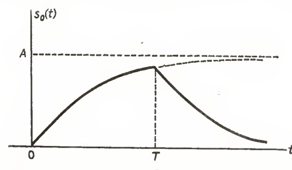


Рис. 9.2. Сигнальная компонента случайного процесса на выходе RC-фильтра.

и изображен на рис. 9.2. Этот результат может быть получен с помощью любого из методов анализа систем. Из рис. 9.2 следует, что выходной полезный сигнал максимален в момент времени $t = T$, поэтому следует выбрать $t_0 = T$. Таким образом, имеем

$$s_0(t_0) = A\,(1 - \exp[-bT]). \quad (9.2)$$

Выше неоднократно было показано, что для RC-цепи анализируемого типа значение среднего квадрата выходного шума равно

$$\overline{M^2} = bN_0/2. \quad (9.3)$$

Следовательно, максимизируемое отношение сигнал/шум имеет вид

$$\frac{s_0^2(t_0)}{\overline{M^2}} = \frac{A^2\,(1-\exp[-bT])^2}{bN_0/2}. \quad (9.4)$$

Прежде чем перейти к процедуре максимизации, следует отметить, что это отношение положительно для всех $b > 0$ и равно нулю для $b = 0$ и $b = \infty$. Следовательно, должно существовать положительное значение b, при котором это отношение максимально.

Для определения этого значения b продифференцируем (9.4) по переменной b и производную приравняем нулю:

$$\frac{d\,[s_0^2\,(t_o)/\overline{M^2}]}{db} = \frac{2A^2}{N_0}\,\frac{2b\,(1-\exp[-bT])\,T\exp[-bT]-(1-\exp[-bT])^2}{b^2} = 0. \tag{9.5}$$

После упрощения это соотношение приводится к виду

$$2bT + 1 = e^{bT}. \tag{9.6}$$

Это уравнение легко решается относительно неизвестной величины bT методом «проб и ошибок» и приводит к решению

$$bT \approx 1{,}256, \tag{9.7}$$

откуда оптимальное значение постоянной времени RC-цепи определяется как

$$RC = T/1{,}256. \tag{9.8}$$

Следует отметить, что именно это значение постоянной времени RC-фильтра обеспечивает максимум отношения сигнал/шум в момент времени T.

Следующим этапом процедуры оптимизации является оценка характеристик фильтра, т. е. определение того, насколько высокими фильтрующими свойствами обладает данная RC-цепь. Эта операция легко реализуется подстановкой оптимального значения bT, определенного в (9.7), в выражение (9.4) для отношения сигнал/шум. В результате получим

$$[\,s_o^2\,(t_o)/\overline{M^2}]_{\max} = 0{,}8145\,A^2\,T/N_o. \tag{9.9}$$

Нетрудно заметить, что энергия в импульсе равна A^2T, так что максимальное отношение сигнал/шум пропорционально отношению энергии сигнала к спектральной плотности шума. Этот результат характерен для всех случаев максимизации отношения сигнал/шум при наличии белого шума. Имеются результаты, свидетельствующие о том, что в последнем случае, а именно при воздействии белого шума и при условии, что структура оптимальной системы не является заданной в противоположность тому, что полагалось выше, постоянная пропорциональности равна единице, а не 0,8145. Уменьшение отношения сигнал/шум, имеющее место в данном примере, может рассматриваться как плата за использование простого RC-фильтра. Из данного примера видно, что при этом энергетические потери незначительны, хотя в других случаях они могут быть ощутимыми.

И наконец, последний этап решения задачи оптимизации, который зачастую не принимается во внимание, заключается в анализе чувствительности отношения сигнал/шум к выбору параметра b (в отечественной литературе часто используется термин

«анализ критичности к изменению параметра». — *Перев.*). Проще всего реализовать этот этап, выразив постоянную пропорциональности в (9.4) как функцию параметра b. График этой постоянной

$$K = 2\,(1 - \exp\,[-bT\,])^2/bT \tag{9.10}$$

представлен на рис. 9.3. Видно, что отношение сигнал/шум на выходе системы изменяется незначительно при изменении b в окрестности точки, соответствующей значению параметра bT,

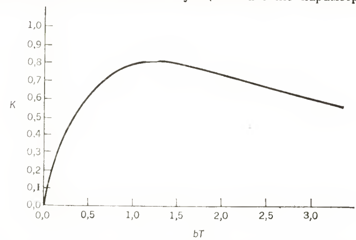


Рис. 9.3. Зависимость отношения сигнал/шум на выходе системы от параметра bT.

при котором имеет место максимум этого отношения. Таким образом, выбор постоянной времени оптимального фильтра не столь важен в части ее совпадения с действительно оптимальным значением.

Тот факт, что анализируемая система не очень чувствительна (критична) к выбору ее параметра, не должен толковаться как всегда имеющий место. Например, если бы сигнал представлял собой импульс с высокочастотным синусоидальным заполнением, а система — резонансную цепь, то характеристики этой системы в значительной степени зависели бы от резонансной частоты, а значит, и от индуктивности и емкости ее элементов.

В качестве второго примера использования этого метода оптимизации рассмотрим воздействие случайного сигнала и будем использовать критерий минимума среднего квадрата ошибки. Анализируемой системой будет идеальный фильтр нижних частот, для которого необходимо определить оптимальную ширину полосы пропускания.

Предположим, что на вход этого фильтра воздействует случайный сигнал $X(t)$, спектральная плотность которого

$$S_X(\omega) = A^2/[\omega^2 + (2\pi f_a)^2]. \qquad (9.11)$$

Этот сигнал принимается на фоне белого шума $N(t)$ со спектральной плотностью N_0. На рис. 9.4 иллюстрируются спектральные плотности сигнала и шума, а также квадрат модуля комплексной частотной характеристики идеального фильтра нижних частот.

Так как линейный фильтр представляет собой фильтр нижних частот, ошибка $E(t) = X(t) - Y(t)$ воспроизведения *сиг-*

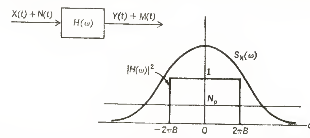


Рис. 9.4. Спектральные плотности сигнала и шума; квадрат модуля комплексной частотной характеристики идеального фильтра нижних частот.

нальной компоненты (т. е. ошибка воспроизведения $X(t)$ на выходе в отсутствие шума на входе) целиком обусловлена составляющими спектральной плотности сигнала, находящимися вне пределов полосы пропускания фильтра. Значение среднего квадрата этой ошибки может быть определено интегрированием спектральной плотности случайного сигнала в пределах, превышающих $|2\pi B|$. В силу симметрии спектральной плотности достаточно вычислить соответствующий интеграл в одном полуинтервале с последующим удвоением полученного результата. Тогда получим

$$\overline{E^2} = (2/2\pi) \int_{2\pi B}^{\infty} \{A^2/[\omega^2 + (2\pi f_a)^2]\}\, d\omega = (2A^2/4\pi^2 f_a) \times$$
$$\times [\pi/2 - \operatorname{arctg}(B/f_a)]. \qquad (9.12)$$

Шум $M(t)$ на выходе фильтра имеет значение среднего квадрата

$$\overline{M^2} = (1/2\pi) \int_{-2\pi B}^{2\pi B} N_0\, d\omega = 2BN_0. \qquad (9.13)$$

Суммарное значение среднего квадрата ошибки в силу независимости сигнала и шума равно сумме компонент, определяемых выражениями (9.12) и (9.13), а именно

$$\overline{E^2} + \overline{M^2} = (2A^2/4\pi^2 f_a)[\pi/2 - \operatorname{arctg}(B/f_a)] + 2BN_0. \qquad (9.14)$$

Минимизация этой суммы реализуется соответствующим выбором параметра B, что означает дифференцирование (9.14) по аргументу B и приравнивание результата нулю:

$$[(2A^2/4\pi^2 f_a)(-1/f_a)]/[1+(B/f_a)^2]+2N_o=0,$$

откуда получаем оптимальное значение параметра B

$$B=[(A^2/4\pi^2 N_o)-f_a^2]^{1/2}. \qquad (9.15)$$

Подставляя это значение параметра B в выражение (9.14), получим минимальное значение среднего квадрата ошибки.

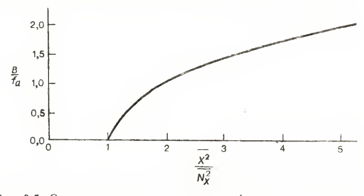


Рис. 9.5. Оптимальная полоса пропускания фильтра нижних частот.

Форма записи вида (9.15) не столь очевидна в ее интерпретации. Поэтому представим несколько более простую форму записи с учетом того, что средний квадрат сигнала равен $\overline{X^2}=A^2/4\pi f_a$, а значение среднего квадрата шума, содержащегося в пределах эквивалентной шумовой полосы сигнала (определяется по аналогии с эквивалентной шумовой полосой системы — см. разд. 8.10), равно $\overline{N_X^2}=\pi f_a N_o$, так как эквивалентная шумовая полоса сигнала равна $(\pi/2)f_a$. Тогда соотношение (9.15) можно переписать в виде

$$B=f_a[(\overline{X^2}/\overline{N_X^2})-1]^{1/2}, \quad \overline{X^2}>\overline{N_X^2}. \qquad (9.16)$$

График зависимости B/f_a от $\overline{X^2}/\overline{N_X^2}$ изображен на рис. 9.5.

Анализ рис. 9.5 позволяет сделать интересный вывод, заключающийся в том, что оптимальная полоса пропускания фильтра нижних частот равна нулю при равенстве среднего квадрата сигнала на входе фильтра среднему квадрату шума в пределах эквивалентной шумовой полосы сигнала. При этом на выходе фильтра отсутствуют как сигнал, так и шум. Таким образом, минимальное значение среднего квадрата ошибки равно значению среднего

квадрата сигнала. Для меньших значений среднего квадрата сигнала оптимальная полоса по-прежнему остается равной нулю, а минимальное значение среднего квадрата ошибки — равным значению среднего квадрата сигнала.

Приведенный пример нереализуем на практике, так как должен использоваться идеальный фильтр нижних частот, который не может быть построен на основе конечного числа дискретных элементов. Этот фильтр был проанализирован скорее с целью пояснения возможностей анализа таких систем, нежели в интересах их практического применения. Однако для реального фильтра, у которого передний и задний фронты графика квадрата модуля комплексной частотной характеристики оказываются более крутыми, нежели крутизна ветвей графика спектральной плотности сигнала, в значительной степени получаются те же результаты, что и для идеального фильтра нижних частот. Таким образом, этот простой анализ может быть использован для определения оптимальной полосы пропускания реального фильтра нижних частот с крутым фронтом амплитудно-частотной характеристики (с резкой отсечкой). Однако отсюда не должен следовать вывод, что этот упрощенный подход результативен для любого реального фильтра. Например, для простой RC-цепи, изображенной, в частности, на рис. 9.1, *б*, оптимальная полоса пропускания фильтра в значительной степени отличается от величины, определяемой из выражения (9.15). Эти качественные выводы поясняются в упражнении 9.4.2.

В каждом из вышеприведенных примеров в процессе реализации выбранного критерия оптимальности осуществлялся выбор значений только одного параметра системы. Процедура выбора значений двух и более параметров оказывается аналогичной, а именно максимизируемая или минимизируемая величина (в зависимости от выбранного критерия) дифференцируется по каждому из параметров, для которых должны быть определены оптимальные значения, а соответствующие производные приравниваются к нулю. В результате получается система уравнений, решения которой представляют собой оптимальные значения этих параметров. Однако на практике процедура решения такой системы уравнений реализуема только в редких случаях в силу того, что уравнения этой системы оказываются нелинейными и затрудняют получение окончательного результата в аналитической форме. При этом часто могут быть использованы численные методы решения на ЭВМ, однако при этом остается много неразрешенных вопросов, связанных, в частности, с единственностью получаемых решений.

Упражнение 9.4.1. На вход интегратора со сбросом, импульсная характеристика которого равна $h(t) = (1/T)\,[u(t) - u(t-T)]$, воздействует аддитивная смесь прямоугольного импульса, описываемого выражением $s(t) = 2[u(t) -$

$- u(t-1)]$, и белого шума со спектральной плотностью, равной 2 В²/Гц. Ставится задача максимизации отношения сигнал/шум на выходе этого интегратора со сбросом.

а) Определите значение T, максимизирующее отношение сигнал/шум на выходе интегратора.

б) Определите максимальное отношение сигнал/шум на выходе интегратора.

в) При условии, что интервал интегрирования T изменился в любую сторону (в сторону уменьшения или в сторону увеличения) на 10 % относительно оптимального значения T, определите степень уменьшения (в процентах) отношения сигнал/шум на выходе интегратора.

Ответы: 1, 2, 9,09, 10.

Упражнение 9.4.2. Аддитивная смесь сигнала $X(t)$ со спектральной плотностью вида $S_X(\omega) = 40/(\omega^2 + 2{,}25)$ и белого шума, спектральная плотность которого равна 1 В²/Гц, воздействует на вход RC-фильтра нижних частот, имеющего комплексную частотную характеристику $H(\omega) = b/(j\omega + b)$.

а) Определите значение параметра b, минимизирующее средний квадрат ошибки (разности) между входным полезным и выходным суммарным сигналами.

б) Определите минимальное значение среднего квадрата этой ошибки.

в) Определите приближенное значение среднего квадрата ошибки при $b \to 0$.

Ответы: 4,82, 5,57, 13,33.

9.5. Оптимальные системы, максимизирующие отношение сигнал/шум

В данном разделе будут рассмотрены системы, максимизирующие отношение сигнал/шум в определенный момент времени, в случае, когда форма сигнала известна. Предполагается, что структура системы не задана, а единственное ограничение состоит в том, что система должна быть *каузальной* и *линейной*.

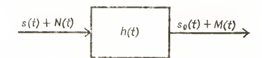


Рис. 9.6. Обозначения сигналов и шумов на входе и выходе оптимального фильтра.

Пояснения к вводимым обозначениям даются на рис. 9.6. Сигнал $s(t)$ полагается детерминированным с известными параметрами (возможно, за исключением амплитуды и времени его прихода). Предполагается, что $N(t)$ — белый шум со спектральной плотностью N_o. Хотя случай воздействия небелого шума здесь не рассматривается (за исключением кратких комментариев в конце данного раздела), для него может быть использована та же самая общая методика. Отношение сигнал/шум на выходе определяется как $s_o^2(t_o)/\overline{M^2}$, где t_o — момент времени, который должен быть выбран. Ставится задача определить импульсную характеристику $h(t)$ оптимальной системы, максимизирующей выходное отношение сигнал/шум.

Полезный сигнал $s_o(t)$ на выходе фильтра определяется выражением

$$s_o(t) = \int_0^\infty h(\lambda)\, s(t-\lambda)\, d\lambda, \tag{9.17}$$

а значение среднего квадрата выходного шума $M(t)$ при воздействии на его вход белого шума есть

$$\overline{M^2} = N_o \int_0^\infty h^2(\lambda)\, d\lambda\,. \tag{9.18}$$

Следовательно, отношение сигнал/шум на выходе в момент t_o определяется как

$$s_o^2(t_o)/\overline{M^2} = \left[\int_0^\infty h(\lambda)\, s(t_o-\lambda)\, d\lambda\right]^2 \Big/ N_o \int_0^\infty h^2(\lambda)\, d\lambda. \tag{9.19}$$

С целью максимизации этого отношения удобно применить *неравенство Шварца—Буняковского*. Это неравенство устанавливает тот факт, что для любых двух функций, скажем, $f(t)$ и $g(t)$, справедливо соотношение

$$\left[\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)\, dt \int_a^b g^2(t)\, dt, \tag{9.20}$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $f(t) = kg(t)$, где k — величина, не зависящая от t, некоторая постоянная.

Применяя неравенство (9.20) к выражению (9.19), получим

$$s_o^2(t_o)/\overline{M^2} \leqslant \left[\int_0^\infty h^2(\lambda)\, d\lambda \int_0^\infty s^2(t_o-\lambda)\, d\lambda\right] \Big/ N_o \int_0^\infty h^2(\lambda)\, d\lambda. \tag{9.21}$$

Отсюда ясно, что отношение сигнал/шум максимально, когда в (9.21) справедлив знак равенства:

$$[\, s_o^2(t_o)/\overline{M^2}\,]_{\max} = (1/N_o) \int_0^\infty s^2(t_o-\lambda)\, d\lambda, \tag{9.22}$$

так как интегралы от функции $h^2(\lambda)$ в числителе и знаменателе взаимно сокращаются. Кроме того, чтобы был справедлив знак равенства, необходимо выполнение условия

$$h(\lambda) = ks(t_o-\lambda)\, u(\lambda). \tag{9.23}$$

Так как k — просто постоянная, не влияющая на отношение сигнал/шум, ее можно положить равной любому значению, и для

удобства пусть $k = 1$. Появление сомножителя $u(\lambda)$ обусловлено необходимостью гарантировать каузальность системы. Отметим, что требуемая импульсная характеристика представляет собой копию полезного сигнала, смещенную в обратном времени (т. е. зеркально отраженную относительно оси ординат) и задержанную на время t_o.

Выполняя в правой части равенства (9.22) замену переменной вида $t = t_o - \lambda$, получим выражение

$$\int_0^\infty s^2(t_o - \lambda)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{t_o} s^2(t)\, dt = \varepsilon(t_o), \tag{9.24}$$

Рис. 9.7. Согласованный фильтр для прямоугольного импульса: *а* — полезный сигнал, *б* — зеркально отображенная и смещенная во времени копия полезного сигнала, *в* — импульсная характеристика оптимального фильтра для $t_o = T$.

откуда ясно, что оно просто определяет энергию полезного сигнала, заключенную в интервале времени вплоть до момента t_o, для которого должна быть осуществлена максимизация отношения сигнал/шум. Эта энергия обозначена через $\varepsilon(t_o)$. Итак, подведем краткий итог.

1. Отношение сигнал/шум в момент t_o максимизируется фильтром, имеющим импульсную характеристику вида

$$h(t) = s(t_o - t)\, u(t). \tag{9.25}$$

2. Максимальное отношение сигнал/шум равно

$$[s_o^2(t_o)/\overline{M^2}]_{\max} = \varepsilon(t_o)/N_o, \tag{9.26}$$

где $\varepsilon(t_o)$ — энергия сигнала $s(t)$ на интервале времени вплоть до момента t_o. Фильтр, определенный соотношением (9.25), называется *согласованным*.

В качестве первого примера, поясняющего эту процедуру оптимизации, вновь рассмотрим случай, когда полезный сигнал представляет собой прямоугольный импульс, изображенный на рис. 9.7, *а*, и найдем импульсную характеристику $h(t)$, максимизирующую отношение сигнал/шум в момент $t_o = T$. На рис. 9.7, *б*

показана зеркально отображенная (относительно оси ординат) и смещенная на произвольное время t_o копия полезного сигнала. Получаемая в результате импульсная характеристика для $t_o = T$, изображенная на рис. 9.7, *в*, описывается выражением

$$h(t) = \begin{cases} A, & 0 \leqslant t \leqslant T, \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases} \qquad (9.27)$$

Максимальное отношение сигнал/шум равно

$$[s_o^2(t_o)/\overline{M^2}]_{\max} = \varepsilon(t_o)/N_o = A^2 T/N_o. \qquad (9.28)$$

Этот результат полезно сравнить с соотношением (9.9).

Чтобы проследить эффект изменения t_o на характеристики оптимального фильтра, приведем графики для зеркально отображенной и смещенной копии полезного сигнала $s(t_o - t)$, импульсной характеристики фильтра $h(t)$ и выходного полезного сигнала $s_o(t)$ в случае воздействия на его вход одного и того же полезного сигнала $s(t)$, изображенного на рис. 9.7, *а*. На графиках, приведенных на рис. 9.8, видно, что при $t_o < T$ отношение сигнал/шум уменьшается вследствие того, что к моменту t_o используется не вся энергия импульса. С другой стороны, увеличение t_o до $t_o > T$ не приводит к дальнейшему росту этого отношения, так как к моменту $t = T$ мы располагаем уже всей энергией импульса. Ясно также, что сигнал на выходе согласованного фильтра не повторяет по форме входной сигнал. Таким образом, согласованный фильтр не подходит в ситуациях, когда необходимо воспроизвести с минимальными искажениями полезного сигнала, принимаемого на фоне шума.

В качестве второго примера согласованных фильтров представляет интерес рассмотрение сигнала, имеющего конечную энергию, но бесконечную длительность. Такой сигнал может описываться временной функцией

$$s(t) = Ae^{-bt}\, u(t), \qquad (9.29)$$

изображенной на рис. 9.9. Для некоторого произвольно выбранного t_o импульсная характеристика оптимального согласованного фильтра, также представленная на этом рисунке, имеет вид

$$h(t) = A \exp[-b(t_o - t)]\, u(t). \qquad (9.30)$$

Максимальное отношение сигнал/шум зависит от выбора значения t_o, так как с его увеличением возрастает энергия сигнала. В данном случае имеем

$$[s_o^2(t_o)/\overline{M^2}]_{\max} = \varepsilon(t_o)/N_o =$$

$$= \int_0^{t_o} (A^2 \exp[-2bt]\, dt/N_o = (A^2/2bN_o)\,(1 - \exp[-2bt_o]). \qquad (9.31)$$

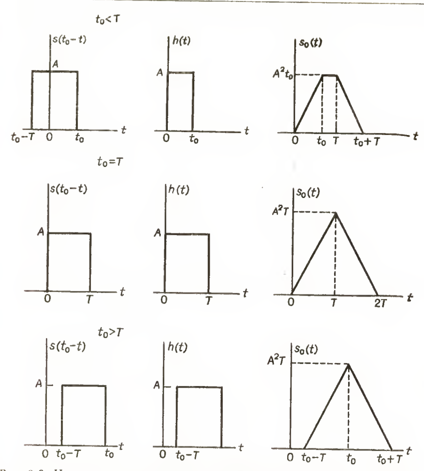


Рис. 9.8. Импульсные характеристики оптимальных фильтров и сигналы на их выходах.

Очевидно, что предельное значение этого отношения, соответствующее $t_0 \to \infty$, равно $A^2/2bN_0$. Следовательно, выбор t_0 определяется требуемой степенью приближения к этому предельному значению. При этом следует помнить, что увеличение t_0 в общем случае приводит к тому, что оптимальная система оказывается более сложной и дорогостоящей.

В качестве третьего и последнего примера согласованных фильтров рассмотрим случай, когда сигналы имеют бесконечно большую энергию и неограниченную длительность. При этом большой практический интерес представляют сигналы в виде пакета периодически следующих радиоимпульсов, используемые,

в частности, в радиолокационных системах. На рис. 9.10 изображены сигнал в виде пакета N принимаемых радиоимпульсов, его зеркально отображенная и смещенная копия, а также импульсная

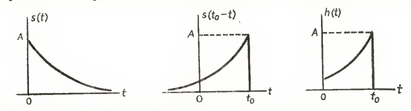


Рис. 9.9. Входной сигнал экспоненциальной формы и импульсная характеристика согласованного фильтра.

характеристика согласованного фильтра. Применительно к данному рисунку величина t_0 состоит из целого числа периодов следования импульсов ($t_0 = NT$), хотя это не является обязательным требованием. Так как энергия, приходящаяся на один импульс,

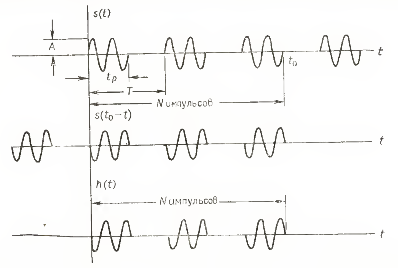


Рис. 9.10. Характеристики согласованного фильтра для N радиоимпульсов.

равна $^1/_2\ A^2 t_p$ (рис. 9.10), отношение сигнал/шум на выходе фильтра, согласованного с пакетом N таких импульсов, равна

$$[\,s_o^2(t_o)/\overline{M^2}]_{\max} = NA^2 t_p/2N_o. \qquad (9.32)$$

Ясно, что эта величина возрастает по мере увеличения числа N импульсов в пакете. Однако при больших N возникают затрудне-

ния в реализации таких согласованных фильтров, поэтому на практике обычно выбирают $N < 10$.

Хотя мы не будем рассматривать в деталях случай небелого шума, тем не менее следует заметить, что применение вышеприведенной методики получения структуры и анализа согласованного фильтра предполагает подключение к его входу устройства, преобразующего небелый шум в белый. Такое устройство называется *обеляющим* фильтром и имеет квадрат модуля комплексной частотной характеристики, определяемый как величина, обратная спектральной плотности шума. Естественно, обеляющий фильтр видоизменяет форму входного полезного сигнала, поэтому следующий за ним согласованный фильтр должен быть согласован с сигналом, форма которого отличается от формы исходного входного сигнала.

Иногда при определенных комбинациях входного полезного сигнала и небелого шума возникает интересное явление, известное под названием *сингулярного обнаружения*. Пусть, например, спектральная плотность небелого шума описывается выражением

$$S_N(\omega) = 1/(\omega^2 + 1).$$

Квадрат модуля комплексной частотной характеристики обеляющего фильтра, преобразующего шум с такой спектральной плотностью в белый шум, равен

$$|H(\omega)|^2 = 1/S_N(\omega) = \omega^2 + 1 = (j\omega + 1)(-j\omega + 1),$$

т. е. сама комплексная частотная характеристика имеет вид

$$H(\omega) = j\omega + 1,$$

что соответствует импульсной характеристике обеляющего фильтра вида

$$h(t) = \delta(t) + \dot{\delta}(t).$$

Следовательно, при любом входном полезном сигнале $s(t)$ полезный сигнал на выходе этого фильтра равен $s(t) + \dot{s}(t)$. Если входным сигналом является прямоугольный импульс, изображенный на рис. 9.7, *а*, то выходной сигнал будет содержать две δ-функции, так как этот фильтр реализует операцию дифференцирования. В силу того что δ-функция заключает в себе бесконечную энергию, она всегда может быть обнаружена независимо от того, сколь малый уровень имеет входной сигнал. Этот же самый результат справедлив, когда огибающие входных сигналов имеют разрывы. Физически такие ситуации не могут возникать, а их появление при анализе систем просто свидетельствует о том, что для входного сигнала используется та или иная идеальная модель. Вследствие невозможности существования разрывов такого характера на практике не возникает и задача сингулярного обна

ружения. Тем не менее тот факт, что анализ оптимальных систем предполагает такую возможность, заставляет обратить внимание на важность использования реальных математических моделей полезных сигналов при получении структур и анализе согласованных фильтров в случае воздействия небелого шума.

Упражнение 9.5.1. Сигнал, описываемый выражением

$$s(t) = 1{,}5t\,[u(t) - u(t-2)],$$

должен быть обнаружен с помощью согласованного фильтра при воздействии белого шума, спектральная плотность которого равна 0,15 В²/Гц.

а) Определите наименьшее t_0, позволяющее получить максимальное отношение сигнал/шум на выходе согласованного фильтра.

б) Для этого t_0 вычислите значения импульсной характеристики согласованного фильтра при $t = 0$, 1 и 2.

в) Определите максимальное отношение сигнал/шум на выходе согласованного фильтра.

Ответы: 0, 1,5, 2, 3, 5.

Упражнение 9.5.2. Сигнал, описываемый выражением

$$s(t) = 5\exp[-(t+2)]\,u(t+2),$$

должен быть обнаружен с помощью согласованного фильтра при воздействии белого шума, спектральная плотность которого равна 0,25 В²/Гц.

а) Для $t_0 = 2$ определите значения импульсной характеристики согласованного фильтра при $t = 0$, 2 и 4.

б) Определите максимальное отношение сигнал/шум на выходе согласованного фильтра, достижимое при $t_0 \to \infty$.

в) Определите значение t_0, при котором отношение сигнал/шум на выходе согласованного фильтра составляет 0,95 от определенного в п.б.

Ответы: —0,502, 0,0916, 0,677, 5, 50.

9.6. Оптимальные системы, минимизирующие средний квадрат ошибки

В данном разделе рассматриваются системы, минимизирующие средний квадрат ошибки (разности) между суммарным сигналом на выходе системы и полезным сигналом на ее входе, когда входной сигнал является стационарным случайным процессом. Предполагается, что эти системы, структуры которых не являются заданными, ограничены классом линейных и каузальных систем.

Представляется целесообразным выполнить анализ этих систем с использованием комплексной s-плоскости, хотя аналогичную задачу можно решить и методом анализа во временной области. Соответствующие обозначения иллюстрируются рис. 9.11, где $S_X(s)$ — спектральная плотность входного случайного сигнала $X(t)$, $S_N(s)$ — спектральная плотность входного шума $N(t)$, $S_Y(s)$ и $S_M(s)$ — соответственно спектральные плотности выходного сигнала $Y(t)$ и выходного шума $M(t)$. Допущение о том, что входным шумом является белый шум, не приводит к существенному упрощению процедуры оптимизации, поэтому такое допущение приниматься не будет.

Ошибка в сигнальной компоненте, обусловленная самой системой, определяется, как и выше, из выражения

$$E(t) = X(t) - Y(t).$$

Преобразование Лапласа этой ошибки имеет вид

$$F_E(s) = F_X(s) - F_Y(s) = F_X(s) - H(s) F_X(s) = F_X(s)[1 - H(s)]. \tag{9.33}$$

Следовательно, $[1 - H(s)]$ — передаточная функция, связывающая *сигнальную ошибку* с входным сигналом, а значение среднего квадрата этой ошибки равно

$$\overline{E^2} = (1/2\pi j) \int_{-j\infty}^{j\infty} S_X(s)[1 - H(s)][1 - H(-s)]\, ds. \tag{9.34}$$

$S_X(s) + S_N(s)$ → $H(s)$ → $S_Y(s) + S_M(s)$

Рис. 9.11. Обозначения спектральных плотностей сигналов и шумов на входе и выходе оптимальной системы.

Значение среднего квадрата шума $M(t)$ на выходе системы определяется из выражения

$$\overline{M^2} = (1/2\pi j) \int_{-j\infty}^{j\infty} S_N(s) H(s) H(-s)\, ds. \tag{9.35}$$

В силу статистической независимости сигнала и шума суммарное значение среднего квадрата ошибки равно $\overline{E^2} + \overline{M^2}$ и определяется из соотношения

$$\overline{E^2} + \overline{M^2} = (1/2\pi j) \int_{-j\infty}^{j\infty} \{S_X(s)[1 - H(s)][1 - H(-s)] + S_N(s) H(s) H(-s)\}\, ds. \tag{9.36}$$

Теперь необходимо определить вид функции $H(s)$, минимизирующей выражение (9.36).

Если бы на систему не было наложено ограничение, связанное с ее обязательной каузальностью, процедура определения оптимального вида функции $H(s)$ была бы очень простой. Чтобы показать это, перегруппируем члены подынтегрального выражения (9.36) и получим

$$\overline{E^2} + \overline{M^2} = (1/2\pi j) \int_{-j\infty}^{j\infty} \{[S_X(s) + S_N(s)] H(s) H(-s) - S_X(s) H(s) - S_X(s) H(-s) + S_X(s)\}\, ds. \tag{9.37}$$

Так как $[S_X(s) + S_N(s)]$ тоже спектральная плотность, она должна обладать свойством симметрии (четности) и, следовательно, может быть представлена в виде двух сомножителей, один из которых имеет полюсы и нули в левой полуплоскости и второй — аналогичные полюсы и нули в правой полуплоскости, т. е. можем записать

$$S_X(s) + S_N(s) = F_i(s) F_i(-s). \quad (9.38)$$

Подставляя это выражение в (9.37) и вновь перегруппировывая члены подынтегрального выражения, получим

$$\overline{E^2} + \overline{M^2} = (1/2\pi j) \int_{-j\infty}^{j\infty} \{[F_i(s) H(s) - S_X(s)/F_i(-s)] [F_i(-s) H(-s) - S_X(s)/F_i(s)] + S_X(s) S_N(s)/F_i(s) F_i(-s)\} \, ds. \quad (9.39)$$

Теперь можно заметить, что последнее слагаемое в подынтегральном выражении (9.39) не включает $H(s)$. Следовательно, с учетом того что произведение, являющееся первым слагаемым подынтегрального выражения, не может быть отрицательным, минимум суммы $\overline{E^2} + \overline{M^2}$ будет иметь место при равенстве его сомножителей нулю. Это означает, что оптимальная передаточная функция $H(s)$ равна

$$H(s) = S_X(s)/[F_i(s) F_i(-s)] = S_X(s)/[S_X(s) + S_N(s)]. \quad (9.40)$$

Справедливость полученного результата казалась бы очевидной, за исключением того, что функция, определяемая (9.40), является симметричной в s-плоскости, а следовательно, не может быть аналитическим представлением каузальной системы.

Так как передаточная функция $H(s)$, определенная соотношением (9.40), не описывает каузальную систему, напрашивается процедура, заключающаяся в использовании полюсов и нулей левой полуплоскости выражения (9.40) для описания каузальной системы. Здесь можно было бы провести аналогию с «отбрасыванием» части функции $s(t_0 - t)$ при $t < 0$ для рассмотренного в предыдущем разделе согласованного фильтра. К сожалению, эта задача не является столь простой, так как в данном случае случайный процесс $X(t) + N(t)$ на входе системы не является белым шумом. Если бы этот процесс был белым шумом, то его корреляционная функция представляла бы собой δ-функцию и, следовательно, все будущие значения входного процесса были бы некоррелированны с его настоящими (текущими) и прошлыми значениями. Таким образом, система, которая не может реагировать на будущие входные воздействия (т. е. каузальная система), не будет отвергать использование любой информации, какая только может привести к улучшению оценки сигнала. Поэтому представляется, что первый шаг в определении структуры кау-

зальной системы должен заключаться в преобразовании суммы сигнала и шума в белый шум, что требует применения обеляющего фильтра.

Из (9.38) очевидно, что если передаточная функция фильтра $H_1(s)$ равна

$$H_1(s) = 1/F_i(s), \tag{9.41}$$

то процесс на его выходе является белым шумом, так как справедливо равенство

$$[S_X(s) + S_N(s)]\, H_1(s)\, H_1(-s) = [S_X(s) + S_N(s)]/F_i(s)\, F_i(-s) = 1.$$

Кроме того, $H_1(s)$ описывает каузальную систему, так как $F_i(s)$ по определению имеет полюсы и нули только в левой полуплоскости. Таким образом, $H_1(s)$ — передаточная функция обеляющего фильтра для суммы входного сигнала и входного шума.

Еще раз проанализируем член $\{F_i(s)\, H(s) - [S_X(s)/F_i(-s)]\}$ в подынтегральном выражении (9.39), который мы полагали равным нулю. Наличие полюсов, расположенных в правой полуплоскости, обусловлено вторым его членом, который в свою очередь мы можем представить (путем разложения на простые дроби) в виде суммы двух слагаемых, одно из которых имеет полюсы только в левой полуплоскости, а другое — только в правой полуплоскости. Тогда в целом выражение для этого сомножителя будет иметь вид

$$F_i(s)\, H(s) - [S_X(s)/F_i(-s)] = \\ = F_i(s)\, H(s) - [S_X(s)/F_i(-s)]_L - [S_X(s)/F_i(-s)]_R, \tag{9.42}$$

где индексы «L» и «R» означают соответственно полюсы только левой и только правой полуплоскости. Теперь ясно, что для $H(s)$, описывающей каузальную систему, анализируемый сомножитель нельзя полагать равным нулю, а наименьшее значение, которое он может иметь, может быть получено путем приравнивания нулю разности первых двух членов в правой части (9.42):

$$F_i(s)\, H(s) - [S_X(s)/F_i(-s)]_L = 0,$$

или

$$H(s) = [1/F_i(s)]\, [S_X(s)/F_i(-s)]_L. \tag{9.43}$$

Заметим, что первый коэффициент в (9.43) представляет собой передаточную функцию $H_1(s)$ обеляющего фильтра. Таким образом, лучшее, что может быть сделано для минимизации среднего квадрата общей ошибки, — это избавиться от *некаузальных* компонент (т. е. компонент, описывающих некаузальные системы) во втором сомножителе в (9.43).

Оптимальный фильтр, минимизирующий средний квадрат общей ошибки, часто называют *фильтром Винера* (винеровским фильтром). Он может рассматриваться в виде двух последовательно

включенных устройств (рис. 9.12), первое из которых является обеляющим фильтром с передаточной функцией $H_1(s)$, а второе, имеющее передаточную функцию $H_2(s)$, — собственно фильтром. Часто функции $H_1(s)$ и $H_2(s)$ имеют общие сомножители, после взаимного сокращения которых общая передаточная функция приобретает более простой вид, чем это можно было ожидать, и становится более простой в реализации, нежели каждый из ее исходных сомножителей $H_1(s)$ и $H_2(s)$.

В качестве примера фильтра Винера рассмотрим случай, когда входной полезный сигнал $X(t)$ и входной шум $N(t)$ имеют соответственно спектральные плотности $S_X(s) = -1/(s^2-1)$ и

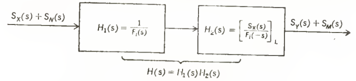


Рис. 9.12. Оптимальный фильтр Винера.

$S_N(s) = -1/(s^2-4)$, тогда имеем

$$F_i(s)F_i(-s) = S_X(s)+S_N(s) = [-1/(s^2-1)]-[1/(s^2-4)] = -(2s^2-5)/(s^2-1)(s^2-4),$$

откуда следует

$$F_i(s) = \sqrt{2}\,(s+\sqrt{2{,}5})/(s+1)(s+2). \qquad (9.44)$$

Поэтому передаточная функция обеляющего фильтра равна

$$H_1(s) = 1/F_i(s) = (s+1)(s+2)/\sqrt{2}\,(s+\sqrt{2{,}5}). \qquad (9.45)$$

Передаточная функция $H_2(s)$ второго фильтра (см. рис. 9.12) легко определяется из соотношения

$$S_X(s)/F_i(-s) = [-1/(s^2-1)](-s+1)(-s+2)/\sqrt{2}\,(-s+\sqrt{2{,}5}) = (s-2)/\sqrt{2}\,(s+1)(s-\sqrt{2{,}5}),$$

которое может быть представлено в виде разложения на простые дроби

$$S_X(s)/F_i(-s) = [0{,}822/(s+1)] + [0{,}115/(s-\sqrt{2{,}5})].$$

Следовательно, передаточная функция $H_2(s)$ равна

$$H_2(s) = [S_X(s)/F_i(-s)]_L = 0{,}822/(s+1). \qquad (9.46)$$

Тогда передаточная функция оптимального фильтра в целом определяется как

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) = [(s+1)(s+2)/\sqrt{2}\,(s+\sqrt{2{,}5})][0{,}822/(s+1)] = 0{,}582(s+2)/(s+\sqrt{2{,}5}). \qquad (9.47)$$

Следует заметить, что полученный оптимальный фильтр в целом по своей структуре проще обеляющего фильтра и может быть реализован с помощью RC-цепи.

Теперь остается оценить характеристики оптимального фильтра, т. е. определить истинное значение минимального среднего квадрата полной ошибки. Решение этой задачи в значительной степени упрощается, если для оптимальной системы данного типа считать достоверным факт некоррелированности остаточной ошибки и процесса на выходе системы. Если бы это утверждение не было справедливым, то можно было бы и далее выполнять линейные операции над выходным сигналом и получать при этом ошибки еще меньшей величины. Таким образом, минимальное значение среднего квадрата ошибки представляет собой просто разность между значениями среднего квадрата входной *сигнальной* компоненты и суммарного процесса на выходе фильтра:

$$(\overline{E^2}+\overline{M^2})_{\min}=(1/2\pi j)\int_{-j\infty}^{j\infty}S_X(s)\,ds-$$

$$-(1/2\pi j)\int_{-j\infty}^{j\infty}[S_X(s)+S_N(s)]\,H(s)\,H(-s)\,ds, \quad (9.48)$$

где $H(s)$ определена в соответствии с (9.43).

Приведенный результат может быть использован для определения минимального значения среднего квадрата ошибки применительно к фильтру Винера, описываемому передаточной функцией вида (9.47). Первый интеграл в (9.48) легко вычислить либо с помощью табл. 7.1, либо путем суммирования вычетов. В итоге получим

$$(1/2\pi j)\int_{-j\infty}^{j\infty}S_X(s)\,ds=(1/2\pi j)\int_{-j\infty}^{j\infty}[-1/(s^2-1)]\,ds=0{,}5.$$

Аналогично вычисляется второй интеграл в (9.48):

$$(1/2\pi j)\int_{-j\infty}^{j\infty}[S_X(s)+S_N(s)]\,H(s)\,H(-s)\,ds=$$

$$=(1/2\pi j)\int_{-j\infty}^{j\infty}[-(2s^2-5)/(s^2-1)(s^2-4)]\,(0{,}582)^2(s^2-4)/(s^2-2{,}5)\,ds=$$

$$=(1/2\pi j)\int_{-j\infty}^{j\infty}[-2\,(0{,}582)^2/(s^2-1)]\,ds=0{,}339.$$

Тогда минимальное значение среднего квадрата ошибки равно

$$(\overline{E^2}+\overline{M^2})_{\min}=0{,}5-0{,}339=0{,}161.$$

Представляет интерес сравнить это значение с полученным в отсутствие фильтра. В этом случае отсутствует сигнальная ошибка, а средний квадрат полной ошибки равен среднему квадрату шума

$$\overline{E^2}+\overline{M^2}=\overline{N^2}=(1/2\pi j)\int_{-j\infty}^{j\infty}[-1/(s^2-4)]\,ds=0{,}25.$$

Отсюда очевидно, что использование фильтра приводит к существенному уменьшению полной ошибки, причем степень этого уменьшения была бы еще более ощутимой при более широкой полосе входного шума.

Упражнение 9.6.1. Осуществляется наблюдение (прием) аддитивной смеси случайного сигнала со спектральной плотностью вида

$$S_X(s)=-1/(s^2-1)$$

и шума со спектральной плотностью

$$S_N(s)=s^2/(s^2-1).$$

Определите минимальное значение среднего квадрата ошибки между входным сигналом и суммарным процессом на выходе оптимальной системы, в качестве которой используется линейный каузальный фильтр.

Ответ: 0,375.

Упражнение 9.6.2. Осуществляется наблюдение аддитивной смеси случайного сигнала $X(t)$ со спектральной плотностью вида

$$S_X(s)=-2s^2/(s^4-13s^2+36)$$

и белого шума, спектральная плотность которого равна 1. Определите полюсы и нули передаточной функции оптимального каузального фильтра Винера, минимизирующего средний квадрат ошибки (разности) между входным сигналом и суммарным сигналом на выходе фильтра.

Ответы: 0, $-\sqrt{3}$, $-2\sqrt{3}$.

ЗАДАЧИ

9.2.1. Для каждой из ситуаций, перечисленных ниже, укажите, какой из критериев оптимальности целесообразно использовать: максимума отношения сигнал/шум или минимума среднего квадрата ошибки:

а) Система автоматического регулирования, подверженная воздействию случайных возмущений.

б) Система автоматического управления полетом самолета.

в) Импульсная радиолокационная система.

г) Радиолокационный измеритель скорости для наряда полиции.

д) Детектор частиц для измерения уровня радиационного облучения.

е) Пассивный звуковой локатор для обнаружения звуковых колебаний под водой.

9.2.2. На входе однозвенного RC-фильтра с комплексной частотной характеристикой вида

$$H(\omega)=b/(b+j\omega)$$

наблюдается аддитивная смесь сигнала в виде синусоидальных незатухающих колебаний амплитудой 2 В и частотой 80 Гц и белого шума, спектральная плотность которого равна 0,01 В²/Гц. RC-фильтр используется для выделения сигнала на фоне шума.

а) Определите отношение сигнал/шум на выходе фильтра, если его полоса пропускания на уровне половинной мощности равна 10 Гц.

б) Проделайте то же самое, если полоса пропускания равна 100 Гц.

в) Проделайте то же самое, если полоса пропускания равна 1000 Гц.

9.3.1. На вход условно изображенной на рисунке каузальной системы с импульсной характеристикой $h(t)$ воздействует белый гауссовский шум $N(t)$ с нулевым математическим ожиданием.



а) Докажите, что выходной процесс $M(t)$ не зависит от $N(t+\tau)$ для всех $\tau > 0$ (т. е. от будущих значений входного процесса), но не является независимым от $N(t+\tau)$ для $\tau \leqslant 0$ (т. е. от прошлых и настоящих значений входного процесса).

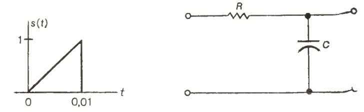
б) Докажите, что утверждение п.а неправомерно, если система является некаузальной.

9.4.1. Для сигнала и шума, параметры которых заданы в исходных данных задачи 9.2.2, определите:

а) полосу пропускания фильтра на уровне половинной мощности, при которой отношение сигнал/шум на его выходе максимально.

б) максимальное отношение сигнал/шум на выходе фильтра.

9.4.2. Наблюдается аддитивная смесь сигнала $s(t)$, показанного на рисунке, и белого шума, спектральная плотность которого равна 2 В²/Гц. Требуется максимизировать отношение сигнал/шум на выходе RC-фильтра, схема которого также приведена на рисунке, при $t = 0{,}01$с. Определите постоянную времени RC-фильтра, при выборе которой реализуется это требование.



9.4.3. На входе RC-фильтра нижних частот с комплексной частотной характеристикой вида

$$H(\omega) = b/(i\omega + b)$$

наблюдается аддитивная смесь случайного сигнала, имеющего спектральную плотность вида

$$S_X(\omega) = \begin{cases} 2, & |\omega| \leqslant 10, \\ 0 & \text{при других } |\omega|, \end{cases}$$

и белого шума, спектральная плотность которого равна 2 В²/Гц.

а) Определите b, при котором минимизируется средний квадрат ошибки между входным сигналом и суммарным процессом на выходе фильтра.

б) Определите минимальный средний квадрат ошибки.

9.4.4. На входе идеального фильтра нижних частот с комплексной частотной характеристикой вида

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leqslant 2\pi W, \\ 0 & \text{при других } |\omega| \end{cases}$$

наблюдается аддитивная смесь случайного сигнала, имеющего спектральную плотность

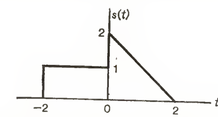
$$S_X(\omega) = \begin{cases} 1 - |\omega|/10, & |\omega| \leqslant 10, \\ 0 & \text{при других } |\omega|, \end{cases}$$

и белого шума, спектральная плотность которого равна 0,1 $В^2/Гц$.

а) Определите W, при котором максимизируется отношение сигнал/шум по мощности на выходе этого фильтра.

б) Определите W, при котором минимизируется средний квадрат ошибки между входным сигналом и суммарным процессом на выходе фильтра.

9.5.1. Наблюдается аддитивная смесь сигнала, форма которого иллюстрируется на рисунке, и белого шума, спектральная плотность которого равна 0,1 $В^2/Гц$.



а) Найдите импульсную характеристику каузального фильтра, максимизирующего отношение сигнал/шум на его выходе при $t_o = 2$.

б) Определите максимальное отношение сигнал/шум на выходе фильтра.

в) Повторите выполнение пп. а и б при $t_o = 0$.

9.5.2. Наблюдается аддитивная смесь сигнала, описываемого выражением $s(t) = te^{-t}u(t)$ ($u(t)$ — единичная ступенчатая функция), и белого шума, спектральная плотность которого равна 0,005 $В^2/Гц$.

а) При условии использования какого-либо линейного фильтра определите, каково наибольшее отношение сигнал/шум на его выходе.

б) Для какого времени наблюдения t_o должен быть построен согласованный фильтр для достижения отношения сигнал/шум на выходе, составляющего 0,9 значения, определенного в п.а?

9.5.3. Сигнал представляет собой пакет прямоугольных импульсов, каждый из которых имеет амплитуду 1 В и длительность 1 мс. Частота следования импульсов в пакете составляет 100 Гц. Такой сигнал наблюдается на фоне белого шума, спектральная плотность которого равна 0,001 $В^2/Гц$.

а) В случае использования каузального фильтра, согласованного с сигналом в виде пакета N импульсов, выразите достижимое отношение сигнал/шум на его выходе как функцию N.

б) Из скольких импульсов должен состоять пакет, чтобы фильтр, согласованный с таким сигналом, позволил получить отношение сигнал/шум на выходе 100?

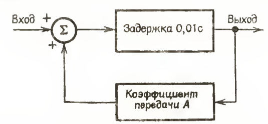
в) Изобразите структурную схему, иллюстрирующую реализацию такого согласованного фильтра на основе интегратора со сбросом и трансверсального фильтра.

9.5.4. На рисунке приведена структурная схема другого варианта фильтра, который может использоваться для обработки пакета импульсов, рассмотренного в задаче 9.5.3. Этот вариант представляет собой рекурсивный фильтр, который в отличие от согласованного фильтра не искажает форму импульса.

а) Определите наибольший коэффициент усиления A, при котором фильтр остается устойчивым.

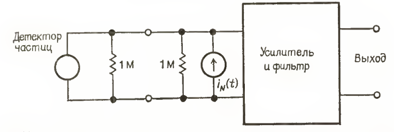
б) Запишите соотношение между отношением сигнал/шум на выходе этого фильтра и коэффициентом усиления A.

в) Определите значение параметра A, требуемое для достижения отношения сигнал/шум на выходе, равного 100.



9.5.5. На схеме показан детектор частиц, подсоединенный к усилителю к выходу которого подключен согласованный фильтр. Детектор частиц моделируется устройством, имеющим внутреннее сопротивление 1 МОм и формирующим на его выходе при обнаружении каждой частицы перепад напряжения $s(t)$, описываемый временной функцией вида

$$s(t) = 10^{-4} \exp[-10^5 t]\, u(t),$$



где $u(t)$ — единичная ступенчатая функция. Входная цепь усилителя может моделироваться схемой из параллельно включенных резистора сопротивлением 1 МОм и источника тока, ток которого представляет собой белый шум со спектральной плотностью 10^{-26} А²/Гц. Пусть выходное сопротивление усилителя пренебрежимо мало по сравнению со входным сопротивлением фильтра.

а) Определите импульсную характеристику фильтра, максимизирующего отношение сигнал/шум на его выходе в момент времени, когда выходное напряжение детектора частиц уменьшается до уровня, равного 0,01 его максимального значения.

б) Определите максимальное отношение сигнал/шум на выходе фильтра.

9.6.1. Наблюдается аддитивная смесь сигнала, представляющего собой стационарный случайный процесс со спектральной плотностью вида $S_X(\omega) = 16/(\omega^2 + 16)$, и белого шума, спектральная плотность которого равна 0,1 В²/Гц.

а) Определите комплексную частотную характеристику некаузального линейного фильтра, минимизирующего средний квадрат ошибки между входным сигналом и суммарным процессом на выходе фильтра.

б) Определите минимум среднего квадрата ошибки при использовании этого фильтра.

9.6.2. Повторите решение задачи 9.6.1 для каузального линейного фильтра.

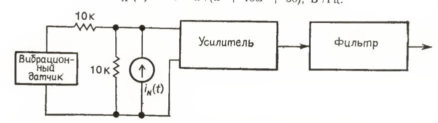
9.6.3. Наблюдается аддитивная смесь сигнала $X(t)$ со спектральной плотностью вида $S_X(\omega) = 4/(\omega^2 + 4)$ и шума со спектральной плотностью $S_N(\omega) = \omega^2/(\omega^2 + 4)$.

а) Определите комплексную частотную характеристику каузального линейного фильтра, минимизирующего средний квадрат ошибки между входным сигналом и суммарным выходным процессом.

б) Определите минимум среднего квадрата ошибки.

9.6.4. На рисунке приведена схема системы, предназначенной для измерения вибраций с помощью чувствительного датчика вибраций, имеющего внутреннее сопротивление 10 кОм. При наличии вибраций этот датчик формирует напряжение, представляющее собой стационарный случайный процесс со спектральной плотностью вида

$$S_X(\omega) = 10^{-4}\,\omega^2/(\omega^4 + 13\omega^2 + 36),\ \text{В}^2/\text{Гц}.$$



К выходу датчика вибраций подключен широкополосный усилитель, входная цепь которого может моделироваться схемой из параллельно включенных резистора сопротивлением 10 кОм и источника шумового тока, причем ток представляет собой белый шум со спектральной плотностью 10^{-8} А^2/Гц. Коэффициент усиления усилителя по напряжению равен 10, а его выходное сопротивление пренебрежимо мало по сравнению со входным сопротивлением подключенного к его выходу каузального линейного фильтра.

а) Определите комплексную частотную характеристику выходного фильтра измерительной системы, минимизирующего средний квадрат ошибки между входным сигналом фильтра и суммарным процессом на его выходе. Выполните нормировку этой частотной характеристики так, чтобы ее максимальное значение было равно единице.

б) Найдите отношение минимума среднего квадрата ошибки к среднему квадрату сигнала на входе фильтра.

ЛИТЕРАТУРА

Рекомендуется обратиться к литературе, приведенной в гл. 1. Особый интерес при изучении материала данной главы представляют книги [3, 7].

Приложение

А. Математические таблицы

Тригонометрические тождества

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\cos A \cos B = [\cos(A+B) + \cos(A-B)]/2$$

$$\sin A \sin B = [\cos(A-B) - \cos(A+B)]/2$$

$$\sin A \cos B = [\sin(A+B) + \sin(A-B)]/2$$

$$\sin A + \sin B = 2\sin[(A+B)/2]\cos[(A-B)/2]$$

$$\sin A - \sin B = 2\sin[(A-B)/2]\cos[(A+B)/2]$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos[(A+B)/2]\cos[(A-B)/2]$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin[(A+B)/2]\sin[(A-B)/2]$$

$$\sin 2A = 2\sin A \cos A$$

$$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$\sin A/2 = [(1-\cos A)/2]^{1/2}$$

$$\cos A/2 = [(1+\cos A)/2]^{1/2}$$

$$\sin^2 A = (1-\cos 2A)/2$$

$$\cos^2 A = (1+\cos 2A)/2$$

$$\sin x = (e^{jx} - e^{-jx})/2j$$

$$\cos x = (e^{jx} + e^{-jx})/2$$

$$e^{jx} = \cos x + j\sin x$$

$$A\cos(\omega t + \varphi_1) + B\cos(\omega t + \varphi_2) = C\cos(\omega t + \varphi_3),$$

где $C = [A^2 + B^2 + 2AB\cos(\varphi_2 - \varphi_1)]^{1/2}$,

$$\varphi_3 = \operatorname{arctg}[(A\sin\varphi_1 + B\sin\varphi_2)/(A\cos\varphi_1 + B\cos\varphi_2)]$$

$$\sin(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi - 90^\circ)$$

Неопределенные интегралы

$$\int \sin ax\,dx = -a^{-1}\cos ax$$

$$\int \cos ax\,dx = a^{-1}\sin ax$$

$$\int \sin^2 ax\,dx = x/2 - (\sin 2ax)/4a$$

$$\int x\sin ax\,dx = (\sin ax - ax\cos ax)/a^2$$

$$\int x^2\sin ax\,dx = (2ax\sin ax + 2\cos ax - a^2x^2\cos ax)/a^3$$

$$\int \cos^2 ax\,dx = x/2 + (1/4a)\sin 2ax$$

$$\int x\cos ax\,dx = (\cos ax + ax\sin ax)/a^2$$

$$\int x^2\cos ax\,dx = (2ax\cos ax - 2\sin ax + a^2x^2\sin ax)/a^3$$

$$\int \sin ax\sin bx\,dx = [\sin(a-b)x]/2(a-b) - [\sin(a+b)]/2(a+b), \quad a^2 \neq b^2$$

$$\int \sin ax\cos bx\,dx = -[\cos(a-b)x]/2(a-b) - [\cos(a+b)x]/2(a+b), \quad a^2 \neq b^2$$

$$\int \cos ax\cos bx\,dx = [\sin(a-b)x]/2(a-b) + [\sin(a+b)x]/2(a+b), \quad a^2 \neq b^2$$

$$\int e^{ax}\,dx = e^{ax}/a$$

$$\int xe^{ax}\,dx = (ax-1)e^{ax}/a^2$$

$$\int x^2e^{ax}\,dx = (a^2x^2 - 2ax + 2)e^{ax}/a^3$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = (a\sin bx - b\cos bx)e^{ax}/(a^2+b^2)$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = (a\cos bx + b\sin bx)e^{ax}/(a^2+b^2)$$

Определенные интегралы

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx = n\,!/a^{n+1} = \Gamma(n+1)/a^{n+1},$$

где $\Gamma(u) = \int_0^\infty z^{u-1}e^{-z}\,dz$ — гамма-функция

$$\int_0^\infty \exp(-r^2x^2)\,dx = \pi^{1/2}/2r$$

$$\int_0^\infty x\exp(-r^2x^2)\,dx = 1/2r^2$$

$$\int_0^\infty x^2\exp(-r^2x^2)\,dx = \pi^{1/2}/4r^3$$

$$\int_0^\infty x^n\exp(-r^2x^2)\,dx = \Gamma[(n+1)/2]/2r^{n+1}$$

$$\int_0^\infty x^{-1}\sin ax\,dx = \begin{cases} \pi/2, & a>0, \\ 0, & a=0, \\ -\pi/2, & a<0 \end{cases}$$

$$\int_0^\infty x^{-2}\sin^2 x\,dx = \pi/2$$

$$\int_0^\infty x^{-2}\sin^2 ax\,dx = |a|\,\pi/2$$

$$\int_0^\pi \sin^2 mx\,dx = \int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \int_0^\pi \cos^2 mx\,dx =$$

$$= \int_0^\pi \cos^2 x\,dx = \pi/2, \quad m \text{—целое}$$

$$\int_0^\pi \sin mx\sin nx\,dx = \int_0^\pi \cos mx\cos nx\,dx = 0, \quad m,\ n \text{ — целые}, \quad m\neq n$$

$$\int_0^\pi \sin mx\cos nx\,dx = \begin{cases} 2m/(m^2-n^2), & m+n \text{ — нечетное}, \\ 0, & m+n \text{ — четное} \end{cases}$$

Преобразование Фурье

	$f(t)$	$F(\omega)$
Определение преобразования Фурье	$f(t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega t)\, d\omega$	$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) \times dt$
Теорема об изменении знака	$f(-t)$	$F(-\omega)$
Свойство симметрии	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
Теорема подобия	$f(at)$	$(1/\|a\|)\, F(\omega/a)$
Теорема о сдвиге	$f(t - t_0)$	$\exp(-j\omega t_0)\, F(\omega)$
Теорема о комплексном сопряжении	$f^*(t)$	$F^*(-\omega)$
Теорема о дифференцировании во временной области	$d^n f(t)/dt^n$	$(j\omega)^n F(\omega)$
Теорема о дифференцировании в частотной области	$t^n f(t)$	$(j)^n\, d^n F(\omega)/d\omega^n$
Теорема об интегрировании	$\int_{-\infty}^{t} f(t) dt$	$F(\omega)/j\omega + \pi F(0)\, \delta(\omega)$
Теорема о свертке во временной области	$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda)\, f_2(t - \lambda)\, d\lambda$	$F_1(\omega)\, F_2(\omega)$
Теорема Парсеваля	$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\, f_2(t)\, dt$	$(1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)\, F_2 \times (-\omega)\, d\omega$
Теорема о свертке в частотной области	$f_1(t)\, f_2(t)$	$(1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\xi) \times F_2(\omega - \xi)\, d\xi$
Теорема о модуляции	$\exp(j\omega_0 t)\, f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$
δ-функция	$\delta(t)$	1

Продолжение табл.

	$f(t)$	$F(\omega)$
Единичная функция	$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$\pi\delta(\omega) + 1/j\omega$
Функция-сигнатура	$\operatorname{sgn} t = \begin{cases} -1, & t < 0, \\ 0, & t = 0, \\ 1, & t > 0 \end{cases}$	$2/j\omega$
Синус	$\sin \omega_0 t$	$-j\pi\,[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
Косинус	$\cos \omega_0 t$	$\pi\,[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
Прямоугольный импульс	1; $-T/2$, 0, $T/2$	$T \sin(\omega T/2)/(\omega T/2)$
Треугольный импульс	1; $-T/2$, 0, $T/2$	$(T/2) \times [\sin(\omega T/4)/(\omega T/4)]^2$
Гауссовский импульс	$\exp\{-\alpha^2 t^2\}$	$(\pi^{1/2}/\alpha)\exp(-\omega^2/4\alpha^2)$
Ряд Фурье	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \exp(j2\pi nt/T)$	$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \delta(\omega - 2\pi n/T)$
Последовательность δ-функций	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$(2\pi/T) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n/T)$
Постоянная величина	K	$2\pi K \delta(\omega)$

Одностороннее преобразование Лапласа

	$f(t)$	$F(s)$
Определение	$f(t) = (1/2\pi j) \times \times \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)\, e^{st}\, ds$	$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt$
Теорема о производной	$f'(t) = df(t)/dt$	$sF(s) - f(0)$
Теорема о второй производной	$f''(t) = d^2 f(t)/dt^2$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
Теорема об интегрировании	$\int_0^t f(\xi)\, d\xi$	$(1/s)\, F(s)$
Теорема об умножении на t	$tf(t)$	$-dF(s)/ds$
Теорема о делении на t	$f(t)/t$	$\int_s^\infty F(\xi)\, d\xi$
Теорема о сдвиге	$f(t - t_0)\, u(t - t_0)$	$\exp(-st_0)\, F(s)$
Теорема об экспоненциальном затухании	$e^{-at} f(t)$	$F(s + a)$
Теорема подобия	$f(at),\quad a > 0$	$(1/a)\, F(s/a)$
Теорема о свертке	$\int_0^t f_1(\lambda)\, f_2(t - \lambda)\, d\lambda$	$F_1(s)\, F_2(s)$
Теорема о значении при $t = 0$	$f(+0)$	$\lim_{s \to \infty} sF(s)$
Теорема о значении при $t = \infty$	$f(\infty)$	$\lim_{s \to 0} sF(s)$ (полюсы $F(s)$ расположены в левой полуплоскости)
δ-функция	$\delta(t)$	1
Единичная функция	$u(t)$	$1/s$
Линейная функция	$tu(t)$	$1/s^2$
Возрастающая функция n-й степени	$t^n u(t)$	$n!/s^{n+1}$

Продолжение табл.

	$f(t)$	$F(s)$
Убывающая экспоненциальная функция	$\exp(-\alpha t)\, u(t)$	$1/(s+\alpha)$
Убывающая линейно-экспоненциальная функция	$t \exp(-\alpha t)\, u(t)$	$1/(s+\alpha)^2$
Синусоидальная функция	$\sin(\beta t)\, u(t)$	$\beta/(s^2+\beta^2)$
Косинусоидальная функция	$\cos(\beta t)\, u(t)$	$s/(s^2+\beta^2)$
Затухающая синусоидальная функция	$\exp(-\alpha t)\sin(\beta t)\, u(t)$	$\beta/[(s+\alpha)^2+\beta^2]$
Затухающая косинусоидальная функция	$\exp(-\alpha t)\cos(\beta t)\, u(t)$	$(s+\alpha)/[(s+\alpha)^2+\beta^2]$

Б. Наиболее часто встречающиеся функции распределения вероятностей

В приложениях теории вероятностей к решению практических задач некоторые функции распределения вероятностей встречаются чаще других. Ниже приведены математические выражения для таких функций распределения вероятностей, а также их основные параметры.

В приложении используются следующие обозначения:

$P(x)$ — вероятность случайного события x

$f_X(x)$ — плотность распределения вероятностей случайной величины X

$\overline{X} = E[X]$ — математическое ожидание случайной величины X

$\sigma_X^2 = E[(X-\overline{X})^2]$ — дисперсия случайной величины X

$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \exp(jux)\, dx$ — характеристическая функция случайной величины X.

Дискретные плотности распределения вероятностей

Распределение Бернулли

(специальный случай биномиального распределения)

$$P(x) = \begin{cases} p, & x = 1, \\ q = 1 - p, & x = 0, \quad 0 < p < 1, \\ 0, & x \neq 0, \quad x \neq 1. \end{cases}$$

$$f_X(x) = p\delta(x-1) + q\delta(x),$$

$$\overline{X} = p, \quad \sigma_X^2 = pq, \quad \varphi(u) = 1 - p + p\exp(ju).$$

Биномиальное распределение

$$P(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, & x = 0, 1, 2, \ldots, n, \\ 0, & x \neq 0, 1, 2, \ldots, n, \end{cases}$$

$$0 < p < 1, \quad q = 1 - p, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$f_X(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta(x-k),$$

$$\overline{X} = np, \ \sigma_X^2 = npq, \quad \varphi(u) = [1 - p + p(e^{ju})]^n.$$

Распределение Паскаля

$$P(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{n-1} p^n q^{x-n}, & x = n, n+1, \ldots, \\ 0, & x = 0, \ldots, n-1, \end{cases}$$

$$0 < p < 1, \quad q = 1 - p, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$\overline{X} = np^{-1}, \quad \sigma_X^2 = nqp^{-2}, \quad \varphi(u) = p^n \exp(jnu)[1 - q\exp(ju)]^{-n}.$$

Распределение Пуассона

$$P(x) = a^x e^{-a}/x!, \quad a > 0, \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

$$\overline{X} = a, \quad \sigma_X^2 = a, \quad \varphi(u) = \exp\{a[e^{ju} - 1]\}.$$

Непрерывные распределения

Бета-распределение

$$f_X(x) = \begin{cases} (a+b-1)!\,x^{a-1}(1-x)^{b-1}/(a-1)!\,(b-1)!, & 0 < x < 1, \\ 0, \quad x \leqslant 0, & x \geqslant 1, \end{cases}$$

$$a > 0, \quad b > 0.$$

$$\overline{X} = a/(a+b), \quad \sigma_X^2 = ab/(a+b)^2(a+b+1).$$

Распределение Коши

$$f_X(x) = a/\pi\,[a^2 + (x-b)^2], \quad -\infty < x < \infty,$$
$$a > 0, \quad -\infty < b < \infty.$$

Математическое ожидание и дисперсия не определены

$$\varphi(u) = \exp(jbu - a\,|\,u\,|)$$

Хи-квадратичное распределение

$$f_X(x) = \begin{cases} [\Gamma(n/2)]^{-1}\, 2^{-n/2} x^{n/2-1} \exp(-x/2), & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$
$$n = 1,\ 2,\ \ldots,$$
$$\overline{X} = n, \quad \sigma_X^2 = 2n, \quad \varphi(u) = (1 - 2ju)^{-n/2}.$$

Распределение Эрланга

$$f_X(x) = \begin{cases} a^n x^{n-1} \exp(-ax)/(n-1)\,!, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$
$$a > 0, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots,$$
$$\overline{X} = na^{-1}, \quad \sigma_X^2 = na^{-2}, \quad \varphi(u) = a^n (a - ju)^{-n}.$$

Экспоненциальное распределение

$$f_X(x) = \begin{cases} a \exp(-ax), & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$
$$a > 0,$$
$$\overline{X} = a^{-1}, \quad \sigma_X^2 = a^{-2}, \quad \varphi(u) = a(a - ju)^{-1}.$$

Гамма-распределение

$$f_X(x) = \begin{cases} x^a \exp(-x/b)/a\,!\; b^{a+1}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$
$$a > -1, \quad b > 0,$$
$$\overline{X} = (a+1)\,b, \quad \sigma_X^2 = (a+1)\,b^2, \quad \varphi(u) = (1 - jbu)^{-(a+1)}.$$

Распределение Лапласа

$$f_X(x) = a \exp(-a\,|\,x - b\,|)/2, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < b < \infty,$$
$$a > 0,$$
$$\overline{X} = b, \quad \sigma_X^2 = 2a^{-2}, \quad \varphi(u) = a^2 \exp(jbu)\,(a^2 + u^2)^{-1}.$$

Логарифмически нормальное распределение

$$f_X(x)=\begin{cases}\exp\{-[\ln(x-a)-b]^2/2\sigma^2\}/(2\pi)^{1/2}\sigma(x-a), & x\geqslant a,\\ 0, & x<a,\end{cases}$$

$$\sigma>0,\quad -\infty<a<\infty,\quad -\infty<b<\infty,$$

$$\overline{X}=a+\exp(b+\sigma^2/2),\quad \sigma_X^2=\exp(2b+\sigma^2)[\exp(\sigma^2)-1]$$

Распределение Максвелла

$$f_X(x)=\begin{cases}(2/\pi)^{1/2}a^3x^2\exp(-a^2x^2/2), & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

$$a>0,$$

$$\overline{X}=(8/\pi)^{1/2}a^{-1},\quad \sigma_X^2=(3-8/\pi)a^{-2},$$

Распределение Гаусса (нормальное распределение)

$$f_X(x)=(2\pi)^{-1/2}\sigma_X^{-1}\exp[-(x-\overline{X})^2/2\sigma_X^2],\quad -\infty<x<\infty$$

$$\sigma_X>0,\quad -\infty<\overline{X}<\infty,\quad \varphi(u)=\exp[ju\overline{X}-u^2\sigma_X^2/2]$$

Двумерное распределение Гаусса

$$f_{X,Y}(x,\ y)=(2\pi\sigma_X\sigma_Y)^{-1}(1-\rho^2)^{-1/2}\exp\{[-1/2(1-\rho^2)]\times$$

$$\times[((x-\overline{X})/\sigma_X)^2+((y-\overline{Y})/\sigma_Y)^2-2\rho(x-\overline{X})(y-Y)/\sigma_X\sigma_Y]\},$$

$$-\infty<x<\infty,\quad -\infty<y<\infty,\quad \sigma_X>0,\quad \sigma_Y>0,\quad -1<\rho<1,$$

$$\varphi(u,\ v)=\exp[ju\overline{X}+jv\overline{Y}-(u^2\sigma_X^2+2\rho uv\sigma_X\sigma_Y+v^2\sigma_Y^2)/2)]$$

Распределение Рэлея

$$f_X(x)=\begin{cases}(x/a^2)\exp(-x^2/2a^2), & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

$$\overline{X}=a(\pi/2)^{1/2},\quad \sigma_X^2=(2-\pi/2)a^2.$$

Равномерное распределение

$$f_X(x)=\begin{cases}1/(b-a), & a<x<b,\\ 0, & x\leqslant a,\quad x\geqslant b,\end{cases}$$

$$-\infty<a<b<\infty,$$

$$\overline{X}=(a+b)/2,\quad \sigma_X^2=(b-a)^2/12,$$

$$\varphi(u)=[\exp(jub)-\exp(jua)]/ju(b-a).$$

Распределение Вейбулла

$$f_X(x)=\begin{cases} abx^{b-1}\exp(-ax^b), & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

$$a>0,\quad b>0,$$

$$\overline{X}=(1/a)^{1/b}\,\Gamma\left(1+b^{-1}\right),\quad \sigma_X^2=(1/a)^{2/b}\left\{\Gamma\left(1+2b^{-1}\right)-\right.$$
$$\left.-\left[\Gamma\left(1+b^{-1}\right)\right]^2\right\}.$$

В. Биномиальные коэффициенты

$$\binom{n}{m}=\frac{n!}{(n-m)!\,m!}$$

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005
16	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440
17	1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310
18	1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620
19	1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378

$$\binom{n}{m}+\binom{n}{m+1}=\binom{n+1}{m+1}$$

$$\binom{n}{n-m}=\binom{n}{m}$$

Г. Нормальное распределение

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt; \ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

x	,00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0,0	,5000	,5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0,1	,5398	,5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0,2	,5793	,5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0,3	,6179	,6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0,4	,6554	,6591	.6628	.6664	.6700	.6736	6772	.6808	.6844	.6879
0,5	,6915	,6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0,6	,7257	,7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0,7	,7580	,7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	09
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	9995
3.3	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	9999	9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	,9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	1.0000	1.0000	1.0000

Д. Q-функция

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2/2}\, du \qquad Q(-x) = 1 - Q(x)$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2297	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.2275E–01	0.2222E–01	0.2169E–01	0.2118E–01	0.2068E–01	0.2018E–01	0.1970E–01	0.1923E–01	0.1876E–01	0.1831E–01
2.1	0.1786E–01	0.1743E–01	0.1700E–01	0.1659E–01	0.1618E–01	0.1578E–01	0.1539E–01	0.1500E–01	0.1463E–01	0.1426E–01
2.2	0.1390E–01	0.1355E–01	0.1321E–01	0.1287E–01	0.1255E–01	0.1222E–01	0.1191E–01	0.1160E–01	0.1130E–01	0.1101E–01
2.3	0.1072E–01	0.1044E–01	0.1017E–01	0.9903E–02	0.9642E–02	0.9387E–02	0.9137E–02	0.8894E–02	0.8656E–02	0.8424E–02
2.4	0.8198E–02	0.7976E–02	0.7760E–02	0.7549E–02	0.7344E–02	0.7143E–02	0.6947E–02	0.6756E–02	0.6569E–02	0.6387E–02
2.5	0.6210E–02	0.6037E–02	0.5868E–02	0.5703E–02	0.5543E–02	0.5386E–02	0.5234E–02	0.5085E–02	0.4940E–02	0.4799E–02
2.6	0.4661E–02	0.4527E–02	0.4396E–02	0.4269E–02	0.4145E–02	0.4025E–02	0.3907E–02	0.3793E–02	0.3681E–02	0.3573E–02
2.7	0.3467E–02	0.3364E–02	0.3264E–02	0.3167E–02	0.3072E–02	0.2980E–02	0.2890E–02	0.2803E–02	0.2718E–02	0.2635E–02
2.8	0.2555E–02	0.2477E–02	0.2401E–02	0.2327E–02	0.2256E–02	0.2186E–02	0.2118E–02	0.2052E–02	0.1988E–02	0.1926E–02
2.9	0.1866E–02	0.1807E–02	0.1750E–02	0.1695E–02	0.1641E–02	0.1589E–02	0.1538E–02	0.1489E–02	0.1441E–02	0.1395E–02

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
3.0	0.1350E–02	0.1306E–02	0.1264E–02	0.1223E–02	0.1183E–02	0.1144E–02	0.1107E–02	0.1070E–02	0.1035E–02	0.1001E–02
3.1	0.9676E–03	0.9354E–03	0.9043E–03	0.8740E–03	0.8447E–03	0.8164E–03	0.7888E–03	0.7622E–03	0.7364E–03	0.7114E–03
3.2	0.6871E–03	0.6637E–03	0.6410E–03	0.6190E–03	0.5977E–03	0.5770E–03	0.5571E–03	0.5377E–03	0.5190E–03	0.5009E–03
3.3	0.4834E–03	0.4665E–03	0.4501E–03	0.4342E–03	0.4189E–03	0.4041E–03	0.3897E–03	0.3758E–03	0.3624E–03	0.3495E–03
3.4	0.3369E–03	0.3248E–03	0.3131E–03	0.3018E–03	0.2909E–03	0.2803E–03	0.2701E–03	0.2602E–03	0.2507E–03	0.2415E–03
3.5	0.2326E–03	0.2241E–03	0.2158E–03	0.2078E–03	0.2001E–03	0.1926E–03	0.1854E–03	0.1785E–03	0.1718E–03	0.1653E–03
3.6	0.1591E–03	0.1531E–03	0.1473E–03	0.1417E–03	0.1363E–03	0.1311E–03	0.1261E–03	0.1213E–03	0.1166E–03	0.1121E–03
3.7	0.1078E–03	0.1036E–03	0.9961E–04	0.9574E–04	0.9201E–04	0.8842E–04	0.8496E–04	0.8162E–04	0.7841E–04	0.7532E–04
3.8	0.7235E–04	0.6948E–04	0.6673E–04	0.6407E–04	0.6152E–04	0.5906E–04	0.5669E–04	0.5442E–04	0.5223E–04	0.5012E–04
3.9	0.4810E–04	0.4615E–04	0.4427E–04	0.4247E–04	0.4074E–04	0.3908E–04	0.3748E–04	0.3594E–04	0.3446E–04	0.3304E–04
4.0	0.3167E–04	0.3036E–04	0.2910E–04	0.2789E–04	0.2673E–04	0.2561E–04	0.2454E–04	0.2351E–04	0.2252E–04	0.2157E–04
4.1	0.2066E–04	0.1978E–04	0.1894E–04	0.1814E–04	0.1737E–04	0.1662E–04	0.1591E–04	0.1523E–04	0.1458E–04	0.1395E–04
4.2	0.1335E–04	0.1277E–04	0.1222E–04	0.1168E–04	0.1118E–04	0.1069E–04	0.1022E–04	0.9774E–05	0.9345E–05	0.8934E–05
4.3	0.8540E–05	0.8163E–05	0.7802E–05	0.7456E–05	0.7124E–04	0.6807E–05	0.6503E–05	0.6212E–05	0.5934E–05	0.5668E–05
4.4	0.5413E–05	0.5169E–05	0.4935E–05	0.4712E–05	0.4498E–05	0.4294E–05	0.4098E–05	0.3911E–05	0.3732E–05	0.3561E–05
4.5	0.3398E–05	0.3241E–05	0.3092E–05	0.2949E–05	0.2813E–05	0.2682E–05	0.2558E–05	0.2439E–05	0.2325E–05	0.2216E–05
4.6	0.2112E–05	0.2013E–05	0.1919E–05	0.1828E–05	0.1742E–05	0.1660E–05	0.1581E–05	0.1506E–05	0.1434E–05	0.1366E–05
4.7	0.1301E–05	0.1239E–05	0.1179E–05	0.1123E–05	0.1069E–05	0.1017E–05	0.9680E–06	0.9211E–06	0.8765E–06	0.8339E–06
4.8	0.7933E–06	0.7547E–06	0.7178E–06	0.6827E–06	0.6492E–06	0.6173E–06	0.5869E–06	0.5580E–06	0.5304E–06	0.5042E–06
4.9	0.4792E–06	0.4554E–06	0.4327E–06	0.4112E–06	0.3906E–06	0.3711E–06	0.3525E–06	0.3348E–06	0.3179E–06	0.3019E–06
5.0	0.2867E–06	0.2722E–06	0.2584E–06	0.2452E–06	0.2328E–06	0.2209E–06	0.2096E–06	0.1989E–06	0.1887E–06	0.1790E–06
5.1	0.1698E–06	0.1611E–06	0.1528E–06	0.1449E–06	0.1374E–06	0.1302E–06	0.1235E–06	0.1170E–06	0.1109E–06	0.1051E–06
5.2	0.9964E–07	0.9442E–07	0.8946E–07	0.8475E–07	0.8029E–07	0.7605E–07	0.7203E–07	0.6821E–07	0.6459E–07	0.6116E–07
5.3	0.5790E–07	0.5481E–07	0.5188E–07	0.4911E–07	0.4647E–07	0.4398E–07	0.4161E–07	0.3937E–07	0.3724E–07	0.3523E–07
5.4	0.3332E–07	0.3151E–07	0.2980E–07	0.2818E–07	0.2664E–07	0.2518E–07	0.2381E–07	0.2250E–07	0.2127E–07	0.2010E–07
5.5	0.1899E–07	0.1794E–07	0.1695E–07	0.1601E–07	0.1512E–07	0.1428E–07	0.1349E–07	0.1274E–07	0.1203E–07	0.1135E–07
5.6	0.1072E–07	0.1012E–07	0.9548E–08	0.9011E–08	0.8503E–08	0.8022E–08	0.7569E–08	0.7140E–08	0.6735E–08	0.6352E–08
5.7	0.5990E–08	0.5649E–08	0.5326E–08	0.5022E–08	0.4734E–08	0.4462E–08	0.4206E–08	0.3964E–08	0.3735E–08	0.3519E–08
5.8	0.3316E–08	0.3124E–08	0.2942E–08	0.2771E–08	0.2610E–08	0.2458E–08	0.2314E–08	0.2179E–08	0.2051E–08	0.1931E–08
5.9	0.1818E–08	0.1711E–08	0.1610E–08	0.1515E–08	0.1425E–08	0.1341E–08	0.1261E–08	0.1186E–08	0.1116E–08	0.1049E–08
6.0	0.9866E–09	0.9276E–09	0.8721E–09	0.8198E–09	0.7706E–09	0.7242E–09	0.6806E–09	0.6396E–09	0.6009E–09	0.5646E–09
6.1	0.5303E–09	0.4982E–09	0.4679E–09	0.4394E–09	0.4126E–09	0.3874E–09	0.3637E–09	0.3415E–09	0.3205E–09	0.3008E–09
6.2	0.2823E–09	0.2649E–09	0.2486E–09	0.2332E–09	0.2188E–09	0.2052E–09	0.1925E–09	0.1805E–09	0.1693E–09	0.1587E–09
6.3	0.1488E–09	0.1395E–09	0.1308E–09	0.1226E–09	0.1149E–09	0.1077E–09	0.1009E–09	0.9451E–10	0.8854E–10	0.8294E–10
6.4	0.7769E–10	0.7276E–10	0.6814E–10	0.6380E–10	0.5974E–10	0.5593E–10	0.5235E–10	0.4900E–10	0.4586E–10	0.4292E–10
6.5	0.4016E–10	0.3758E–10	0.3515E–10	0.3289E–10	0.3076E–10	0.2877E–10	0.2690E–10	0.2516E–10	0.2352E–10	0.2199E–10
6.6	0.2056E–10	0.1922E–10	0.1796E–10	0.1678E–10	0.1568E–10	0.1465E–10	0.1369E–10	0.1279E–10	0.1195E–10	0.1116E–10
6.7	0.1042E–10	0.9731E–11	0.9086E–11	0.8483E–11	0.7919E–11	0.7392E–11	0.6900E–11	0.6439E–11	0.6009E–11	0.5607E–11
6.8	0.5231E–11	0.4880E–11	0.4552E–11	0.4246E–11	0.3960E–11	0.3693E–11	0.3443E–11	0.3210E–11	0.2993E–11	0.2790E–11
6.9	0.2600E–11	0.2423E–11	0.2258E–11	0.2104E–11	0.1961E–11	0.1826E–11	0.1701E–11	0.1585E–11	0.1476E–11	0.1374E–11
7.0	0.1280E–11	0.1192E–11	0.1109E–11	0.1033E–11	0.9612E–12	0.8946E–12	0.8325E–12	0.7747E–12	0.7208E–12	0.6706E–12

$Q(x)$	x	$Q(x)$	x
1E–01	1.28115	1E–06	4.75342
1E–02	2.32635	1E–07	5.19934
1E–03	3.09023	1E–08	5.61200
1E–04	3.71902	1E–09	5.99781
1E–05	4.26489	1E–10	6.63134

Е. Распределение Стьюдента

$$F_T(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}} dx$$

v \ F	0.60	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
1	0.325	1.000	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	636.6
2	0.289	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.60
3	0.277	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.94
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.611
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.261	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.260	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.260	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.259	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.259	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.258	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.258	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.258	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.257	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.257	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	0.257	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.257	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	0.257	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	0.256	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.256	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	0.256	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.256	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	0.256	0.684	1.315	1.706	2.055	2.479	2.779	3.707
27	0.256	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	0.256	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	0.256	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	0.256	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	0.255	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	0.254	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	0.254	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	0.253	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

Ж. Программы расчета на ЭВМ оценок корреляционных функций и спектральных плотностей

Приводимые ниже программы на алгоритмическом языке ФОРТРАН полезны для оценивания корреляционных функций и спектральных плотностей при использовании данных, записанных в файл, именуемый далее как «данные». Предполагается, что данные состоят из выборочных значений случайной временной функции; выборки осуществляются на равноотстоящих интервалах времени $\Delta t = 1$ с. Общее число точек, соответствующих

данным, которые должны быть загружены в файл в формате (f 10.7), составляет mm. С целью иллюстрации мы полагаем nn = 31 и mm = 1000, но могут использоваться и другие значения при условии, что nn $\ll$ mm.

Первая программа предназначена для вычисления математического ожидания выборки и корреляционной функции $R(k\Delta t)$ для $k = 0, 1, \ldots$, nn, а также расчета верхней границы дисперсии оценки корреляционной функции с использованием полученных оценок первых двух параметров. Вторая программа обеспечивает расчет оценки корреляционной функции и применение результатов этого расчета для оценивания спектральной плотности $S(q\Delta\omega)$, $q = 0, 1, \ldots$, nn при использовании спектрального окна Хэмминга.

Оценка корреляционной функции

```
      ПАРАМЕТР  (nn = 31,  mm = 1000)
C
C     ОПИСАНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ
C
      ЦЕЛОЕ i1, i2, n
      ВЕЩЕСТВЕННЫЕ  ДАННЫЕ  (0: (mm — 1)), r (0: nn),
      МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ, ДИСПЕРСИЯ
      НАЧАЛО  (ЕДИНИЦА = 2, ФАЙЛ = «ДАННЫЕ»,
           СТАТУС = «СТАРЫЕ»)
      ВЫПОЛНИТЬ 4 i1 = 0, (mm — 1)
4     ЧИТАТЬ (2,5) ДАННЫЕ (i1)
5     ФОРМАТ (f 10.7)
C
C     ВЫЧИСЛИТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ.
C
           ВЫПОЛНИТЬ 10 i1 = 0, (mm — 1)
           МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  ОЖИДАНИЕ = МАТЕМАТИ-
           ЧЕСКОЕ  ОЖИДАНИЕ + ДАННЫЕ (i1)
10    ПРОДОЛЖИТЬ
      МАТЕМАТИЧЕСКОЕ    ОЖИДАНИЕ = МАТЕМАТИЧЕ-
      СКОЕ  ОЖИДАНИЕ/mm
      ПЕЧАТЬ*, «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ  РАВНО»,
      МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ
C
C     ОПРЕДЕЛИТЬ ОЦЕНКУ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ  ФУНК-
      ЦИИ И МАКСИМАЛЬНУЮ ДИСПЕРСИЮ ЭТОЙ  ОЦЕН-
C     КИ
C
      ПЕЧАТЬ*, «ЗНАЧЕНИЯ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ  ФУНК-
      ЦИИ РАВНЫ:»
```

```
    ВЫПОЛНИТЬ 20 n = 0, nn
          ВЫПОЛНИТЬ 30 i2 = 0, (mm — n — 1)
          r (n) = r (n) + ДАННЫЕ (i2)* ДАННЫЕ (i2 + n)
30  ПРОДОЛЖИТЬ
          r (n) = r (n)/(mm — n)
          ПЕЧАТЬ*, «R («, n,»)», r (n)
          ДИСПЕРСИЯ = ДИСПЕРСИЯ + r (n)**2
20  ПРОДОЛЖИТЬ
    ДИСПЕРСИЯ = (ДИСПЕРСИЯ* 4,0—2,0* r (0))/mm
    ПЕЧАТЬ*, «МАКСИМАЛЬНАЯ ДИСПЕРСИЯ ОЦЕНКИ
    РАВНА», ДИСПЕРСИЯ
    СТОП
    КОНЕЦ
```

Оценка спектральной плотности

```
    ПАРАМЕТР (nn = 31, mm = 1000)
C
C   ОПИСАНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ
C
    ЦЕЛОЕ i1, i2, i5, n, q
    ВЕЩЕСТВЕННЫЕ  ДАННЫЕ (0: (mm — 1)), r (0: nn),
          rs (—1: (nn + 1)), hs (0: nn), ПИ
C
    ПИ = 4,0 * arctg (1,0)
    НАЧАЛО (ЕДИНИЦА = 2, ФАЙЛ = «ДАННЫЕ», СТА-
    ТУС = «СТАРЫЕ»)
    ВЫПОЛНИТЬ 4 i1 = 0, (mm — 1)
4   ЧИТАТЬ (2,5) ДАННЫЕ (i1)
5   ФОРМАТ (f 10.7)
C
C   ВЫЧИСЛИТЬ ОЦЕНКУ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНК-
    ЦИИ И МАКСИМАЛЬНУЮ
C         ДИСПЕРСИЮ ОЦЕНКИ
    ПЕЧАТЬ*, «ОЦЕНОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ КОРРЕЛЯ-
             ЦИОННОЙ ФУНКЦИИ РАВНЫ:»
    ВЫПОЛНИТЬ 20 n = 0, nn
          ВЫПОЛНИТЬ 30 i2 = 0, (mm — n — 1)
           r (n) = r (n) + ДАННЫЕ (i2)* ДАННЫЕ (i2 + n)
30        ПРОДОЛЖИТЬ
          r (n) = r (n)/(mm — n)
    ПЕЧАТЬ*, «R («, n, »)», r (n)
20  ПРОДОЛЖИТЬ
C
C   ВЫЧИСЛИТЬ ОЦЕНКУ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ
```

3. Корреляционные функции — спектральные плотности

$R_X(\tau)$	$S_X(\omega)$
$e^{-\alpha\|\tau\|}$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$
$1-\frac{\|\tau\|}{T},\ \|\tau\|\le T$; $0,\ \|\tau\|>T$	$\frac{T\sin^2(\omega T/2)}{(\omega T/2)^2}$
$e^{-\alpha\|\tau\|}\cos\omega_0\tau$	$\frac{\alpha}{\alpha^2+(\omega-\omega_0)^2}+\frac{\alpha}{\alpha^2+(\omega+\omega_0)^2}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\delta(\tau)$	1
$\cos\omega_0\tau$	$\pi\delta(\omega+\omega_0)+\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$2W_1\frac{\sin 2\pi W_1\tau}{2\pi W_1\tau}$	*Низкочастотный спектр*
$2B\frac{\sin(B\tau/2)}{(B\tau/2)}\cos\omega_0\tau$	*Узкополосный спектр*

```
C          ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СПЕКТРАЛЬНОГО ОКНА
           ХЭММИНГА
C
     ПЕЧАТЬ*, «ЗНАЧЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ
     РАВНЫ:»
     ВЫПОЛНИТЬ 40 q = 0, nn
          СУММА = 0,0
          ВЫПОЛНИТЬ 50 i5 = 1, (nn — 1)
               СУММА = 2,0 * r (i5) * cos (q * i5 * ПИ/nn) +
               + СУММА
50        ПРОДОЛЖИТЬ
               rs (q) = r (0) + r (nn) * cos (q * i5 ПИ/nn) +
               СУММА
40   ПРОДОЛЖИТЬ
     rs (—1) = rs (1)
     rs (nn + 1) = 0,0
C
     ВЫПОЛНИТЬ 60 q = 0, nn
          hs (q) = 0,54 * rs (q) + 0,23 * (rs (q + 1) + rs (q — 1))
          ПЕЧАТЬ * , «S (», q * ПИ/nn,») = », hs (q)
60   ПРОДОЛЖИТЬ
     СТОП
     КОНЕЦ
```

И. Интегрирование по контуру

При анализе линейных систем часто приходится иметь дело с интегралами следующих типов:

$$(1/2\pi j)\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)\,e^{st}\,ds, \tag{И.1}$$

$$(1/2\pi j)\int_{-\infty}^{\infty} S_X(s)\,ds. \tag{И.2}$$

Интеграл (И.1) представляет собой формулу обращения преобразования Лапласа, а интеграл (И.2) определяет значение среднего квадрата случайного процесса $X(t)$, имеющего спектральную плотность $S_X(s)$. Эти интегралы могут быть вычислены элементарными методами только в незначительном числе частных случаев. Однако вследствие достаточно «хорошего» в общем случае поведения подынтегральных функций эти интегралы часто

могут быть вычислены с помощью простой процедуры, предполагающей использование метода вычетов. Этот метод основан на применении теоремы о вычетах теории функций комплексного переменного и формулируемой следующим образом: если функция $F(s)$ аналитична внутри замкнутого контура C и на нем (иногда в формулировке теоремы используется термин «регулярна в односвязной области». — *Перев.*), за исключением конечного числа особых точек, то интеграл от функции $F(s)$ по этому замкнутому контуру равен произведению $2\pi j$ на сумму вычетов относительно полюсов $F(s)$, лежащих внутри контура C. Тогда

$$\oint_C F(s)\,ds = 2\pi j \sum (\text{вычеты относительно полюсов}). \quad (\text{И.3})$$

Левая часть выражения (И.3) означает, что осуществляется умножение выбранных значений функции $F(s)$ на каждом из интервалов разбиения контура C на длины этих интервалов и суммирование полученных произведений по всему контуру. Обход контура (т. е. путь интегрирования) осуществляется против часовой стрелки. Изменению направления обхода соответствует появлению знака «минус» в правой части (И.3).

Чтобы использовать (И.3) при вычислении интегралов вида (И.1) и (И.3), необходимо реализовать два этапа: во-первых, освоить метод вычисления вычета относительно некоторого полюса и, во-вторых, связать интегрирование по замкнутому контуру с вычислением определенного интеграла, для которого путь интегрирования (см. И.1 и И.2) не является замкнутым.

Сначала рассмотрим вопрос, связанный с полюсами и определением вычетов относительно них. Некоторая однозначная функция $F(s)$ называется *аналитической* в точке $s = s_0$, если она дифференцируема в каждой точке окрестности s_0, включая саму s_0. Функция называется *аналитической в некоторой области* комплексной плоскости (s-плоскости), если она является аналитической в каждой точке этой области. Если функция аналитична в каждой точке окрестности s_0, исключая саму s_0, то s_0 называется особой точкой. Например, функция $F(s) = 1/(s-2)$ имеет производную $F'(s) = -1/(s-2)^2$. Очевидно, что эта функция является аналитической всюду, кроме точки $s = 2$. *Изолированной особой точкой* называется некоторая точка в области, в пределах которой функция аналитична всюду, кроме этой точки. Ясно, что вышеприведенная функция имеет изолированную особую точку, соответствующую $s = 2$. Наиболее часто приходится иметь дело со случаем, когда особой точкой является *полюс*. Говорят, что функция $F(s)$ имеет полюс n-го порядка (порядка n) в точке $s = s_0$, если для этой функции, равной бесконечности при $s = s_0$, при ее умножении на $(s - s_0)^n$, где n — целое положительное число, устраняется

сингулярность $F(s)$. Например, функция $1/\sin s$ имеет полюс, равный $s = 0$, и может быть записана в виде

$$F(s) = 1/\sin s = 1/[s - (s^2/3!) + + (s^5/5!) - \ldots].$$

Умножая эту функцию на s (что означает умножение на $(s - s_0)$ при $s = 0$), получим функцию

$$\varphi(s) = s/[s - (s^3/3!) + (s^5/5!) + \ldots] = = 1/[1 - (s^2/3!) + (s^4/5!) + \ldots],$$

которая «хорошо ведет себя» при $s \to 0$. Поэтому можно заключить, что функция $1/\sin s$ имеет простой полюс (т. е. полюс 1-го порядка) при $s = 0$.

Важным свойством аналитических функций является возможность представления этих функций в пределах области их аналитичности сходящимися рядами. Используем это свойство для представления функций в окрестности особых точек. Рассмотрим функцию $F(s)$, имеющую полюс n-го порядка при $s = s_0$. Введем новую функцию $\varphi(s)$, которую определим следующим образом:

$$\varphi(s) = (s - s_0)^n F(s). \quad (\text{И.4})$$

Тогда $\varphi(s)$ будет аналитической функцией в окрестности s_0, так как устранена особенность функции $F(s)$. Поэтому для функции $\varphi(s)$ можно использовать разложение в ряд Тейлора в виде

$$\varphi(s) = A_{-n} + A_{-n+1}(s - s_0) + A_{-n+2}(s - s_0)^2 + \cdots + A_{-1}(s - s_0)^{n-1} + \sum_{k=0}^{\infty} B_k (s - s_0)^{n+k}. \quad (\text{И.5})$$

Выполняя подстановку (И.5) в (И.4), получим для $F(s)$ выражение

$$F(s) = [A_{-n}/(s - s_0)^n] + [A_{-n+1}/(s - s_0)^{n-1}] + \cdots + [A_{-1}/(s - s_0)] + \sum_{k=0}^{\infty} B_k (s - s_0)^k. \quad (\text{И.6})$$

Это разложение справедливо в окрестности полюса $s = s_0$. Данный ряд сходится внутри круга (кольца) с центром в точке s_0. Соотношение (И.6) называется *разложением в ряд Лорана* или просто *рядом Лорана* для функции $F(s)$ в окрестности особой точки $s = s_0$. Разложение вида (И.6) включает в себя две компоненты: первую, содержащую члены $(s - s_0)$ с отрицательными показателями и называемую *главной частью* ряда, и вторую, содержащую члены с нулевым и положительными показателями и называемую частью в виде ряда Тейлора или правильной частью ряда. Следует заметить, что вторая компонента представляет собой аналитическую

функцию в пределах комплексной s-плоскости (исключая бесконечность), принимающую при $s = s_0$ значение B_0. Если бы функция $F(s)$ не обладала особенностью, то в разложении (И.6) присутствовала бы только вторая компонента, а именно разложение в ряд Тейлора. Коэффициент A_{-1} члена $A_{-1}(s - s_0)^{-1}$ в выражении (И.6) называется *вычетом* функции $F(s)$ в полюсе $s = s_0$.

Формально коэффициенты разложения в ряд Лорана могут быть определены путем разложения функции $\varphi(s)$ в ряд Тейлора и последующего деления результата на $(s - s_0)^n$. В большинстве случаев, возникающих в инженерной практике, могут быть использованы более простые методы. В силу свойства единственности представления аналитических функций следует, что какое-либо разложение адекватного вида (т. е. вида (И.6)) действительно должно быть рядом Лорана. Когда $F(s)$ есть отношение двух полиномов относительно s, существует простая процедура разложения в ряд Лорана, а именно: необходимо ввести в рассмотрение функцию $\varphi(s) = (s - s_0)^n F(s)$, затем осуществить замену переменных вида $s - s_0 = v$, т. е. $s = v + s_0$, далее разложить функцию $\varphi(v + s_0)$ относительно точки $v = 0$ делением знаменателя на числитель и наконец заменить v на $(s - s_0)$. В качестве примера рассмотрим функцию $F(s)$ вида $F(s) = 2/s^2(s^2 - 1)$. Пусть требуется определить разложение в ряд Лорана этой функции в окрестности точки $s = -1$. Функция $\varphi(s)$ имеет вид

$$\varphi(s) = 2/s^2(s - 1).$$

В результате замены переменной вида $s = v - 1$ получим

$$\varphi(v - 1) = 2/(v^2 - 2v + 1)(v - 2) = 2/(v^3 - 4v^2 + 5v - 2) = \\ = \frac{1}{(v^3 - 4v^2 + 5v - 2)/2} = \frac{1}{(v^3 - 4v^2 + 5v)/2 - 1} = \\ = -\frac{1}{1 - [(v^3 - 4v^2 + 5v)]/2},$$

тогда, ограничиваясь членами второго порядка малости, получим

$$\varphi(v - 1) = -\{1 + [(v^3 - 4v^2 + 5v)/2] + [(v^3 - 4v^2 + 5v)/2]^2\} \approx \\ \approx -1 - (5/2)v - (17/4)v^2 - \dots .$$

Осуществляя замену $v - 1 = s$, запишем

$$\varphi(s) = -1 - {}^5/_2\,(s + 1) - (17/4)(s + 1)^2 - \dots;$$

$$F(s) = -1/(s + 1) - {}^5/_2 - (17/4)(s + 1) - \dots .$$

Очевидно, что вычет равен -1.

Существует полезная на практике формула для вычисления вычета относительно n-кратного полюса $s = s_0$

$$K_{s_0} = \varphi^{(n-1)}(s_0)/(n-1)\,!, \qquad (\text{И}.7)$$

где $\varphi(s) = (s - s_0)^n F(s)$. Из этой формулы при $n = 1$ легко получить формулу вычета относительно простого полюса. Правомерность данного соотношения не ограничивается классом рациональных функций.

Когда функция $F(s)$ не представляет собой отношение полиномов, допустима ее замена разложением в ряд в окрестности полюса, как, например, функции $F(s) = (\sin s)/s^2$:

$$F(s) = (\sin s)/s^2 = (1/s^2)\,[s - (s^3/3!) + $$
$$+ (s^5/5!) - \dots] = (1/s) - (s/3!) + (s^3/5) - \dots .$$

В данном примере вычет для $F(s)$ относительно полюса $s = 0$ равен единице.

Существует прямая связь между рядом Лорана и разложением функции $F(s)$ на простые дроби. В частности, если $H_i(s)$ — главная часть разложения функции $F(s)$ в ряд Лорана относительно полюса $s = s_0$, то ее разложение на простые дроби может быть представлено в виде

$$F(s) = H_1(s) + H_2(s) + \dots + H_k(s) + q(s),$$

где первые k членов принадлежит к главной части ряда Лорана относительно k полюсов, а $q(s)$ — полином вида $q(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_m s^m$, характеризующий поведение функции $F(s)$ при больших s. Величина m определяется разностью показателей полиномов числителя и знаменателя, что справедливо до тех пор, пока остаток деления имеет показатель, меньший показателя знаменателя. Остаток деления может быть затем разложен на его главные части.

Что касается проблемы определения вычетов, единственным вопросом, на который осталось дать ответ, является установление связи между замкнутым контуром в (И.3) и разомкнутым (прямолинейным) контуром интегрирования в (И.1) и (И.2). Эта задача легко решается путем ограничения класса рассматриваемых подынтегральных функций теми из них, которые при больших значениях своих аргументов достаточно быстро стремятся к нулю, а значит, вклад от удаленных участков контуров интегрирования в интересующие нас интегралы будет незначителен. Таким образом, хотя действительный контур интегрирования в s-плоскости представляет собой прямую с пределами от $s = c - j\infty$ до $s = c + j\infty$ (см. формулу (И.1)), для вычисления интеграла вос-

[1]) $\varphi^{(n-1)}(s_0)$ обозначает $(n-1)$-ю производную функции $\varphi(s)$ по аргументу s при $s = s_0$.

пользуемся замкнутым контуром интегрирования, изображенным на рис. И.1. Замкнутый контур интегрирования состоит из отрезка C_1 $([c - jR_0,\ c + jR_0])$ и полуокружности C_2, замыкающей его слева. Тогда интеграл по замкнутому контуру равен

$$\oint\limits_{C_1+C_2} F(s)\,ds = \int\limits_{C_1} F(s)\,ds + \int\limits_{C_2} F(s)\,ds. \tag{И.8}$$

В пределе при $R_0 \to \infty$ второй интеграл в правой части выражения (И.8) равен нулю, тогда

$$\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)\,ds = \lim_{R_0\to\infty} \oint\limits_{C_1+C_2} F(s)\,ds = 2\pi j \sum (\text{вычеты в полюсах}). \tag{И.9}$$

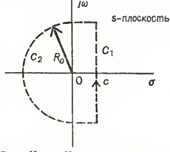


Рис. И.1. Контур интегрирования в s-плоскости.

В каждом отдельном случае можно убедиться в том, насколько существенным оказывается вклад интеграла по контуру C_2 в общий интеграл. Ниже приводятся два частных случая, имеющих место во многих ситуациях, когда возникает проблема учета этого интеграла:

1. Всякий раз, когда $F(s)$ является рациональной функцией, показатель знаменателя которой превышает по крайней мере на два порядка показатель числителя, справедливо равенство

$$\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)\,ds = \oint\limits_{C_1+C_2} F(s)\,ds.$$

2. Если $F_1(s)$ является аналитической функцией в левой полуплоскости, за исключением конечного числа полюсов, и равномерно стремится к нулю при $|s| \to \infty$ и $\sigma < 0$ (σ — вещественная ось на s-плоскости — см. рис. И.1), то для положительных t справедливо равенство (*лемма Жордана*)

$$\lim_{R_0=\infty} \int\limits_{C_2} F_1(s)\,e^{st}\,ds = 0.$$

Отсюда следует, что когда эти условия выполнены, оригинал $f(t)$, получаемый из формулы обращения преобразования Лапласа, может быть определен следующим образом:

$$f(t) = (1/2\pi j) \int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(s)\,e^{st}\,ds =$$

$$= (1/2\pi j) \oint\limits_{C_1+C_2} F_1(s)\,e^{st}\,ds = \sum_j k_j,$$

где k_j — вычет относительно j-го полюса, расположенного в левой полуплоскости.

Рассмотрим два примера, иллюстрирующие применение приведенных процедур.

Пример 1. Пусть случайный процесс $X(t)$ имеет спектральную плотность вида

$$S_X(\omega) = 1/(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 4).$$

Требуется определить значение среднего квадрата этого процесса. Осуществляя замену переменной вида $\omega = -js$, получим

$$S_X(s) = 1/(-s^2 + 1)(-s^2 + 4) = 1/(s^2 - 1)(s^2 - 4).$$

Тогда значение среднего квадрата равно

$$\overline{X^2} = (1/2\pi j) \int\limits_{-j\infty}^{j\infty} ds/(s^2 - 1)(s^2 - 4)^{-1} = k_{-1} + k_{-2}.$$

Используя разложение $S_X(s)$ на простые дроби, получим значения вычетов

$$k_{-1} = 1/(-1-1)(1-4) = 1/6,$$

$$k_{-2} = 1/(4-1)(-2-2) = -1/12.$$

Тогда окончательно имеем

$$\overline{X^2} = 1/6 - 1/12 = 1/12.$$

Пример 2. Требуется найти обратное преобразование Лапласа функции $F(s) = 1/s(s+2)$. Имеем

$$f(t) = (1/2\pi j) \int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty} \{e^{st}/s(s+2)\}\, ds = k_0 + k_{-2}.$$

Используя (И.7), вычислим вычеты

$$k_0 = e^{st}/(s+2)\,|_{s=0} = {}^1/_2,$$

$$k_{-2} = e^{st}/s\,|_{s=-2} = e^{-2t}/(-2),$$

откуда имеем окончательный результат

$$f(t) = {}^1/_2(1 - e^{-2t}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Churchill R.* Operational Mathematics, 2nd Ed., New York, N. Y.: McGraw-Hill Book Co., Inc., 1958.

В данном источнике достаточно полно и подробно рассматриваются математические аспекты, связанные в первую очередь с преобразованием Лапласа, включая вводную часть теории комплексного переменного и интегрирование по замкнутому контуру.

2. *Papoulis A.* The Fourier Integral and Its Applications. New York, N. Y.: McGraw-Hill Book Co., Inc,. 1962.

В гл. 9 и приложении II в легкодоступной форме приводится материал, связанный с определением преобразований функций и использованием интегрирования по замкнутому контуру.

К. Ответы к некоторым задачам

К главе 1

1.1.1. б) 1,633, 2,237.
1.4.1. а) 1/6, б) 1/2, в) 1/2.
1.4.2. а) 1/18, б) 1/6, в) 1/2.
1.4.3. а) 1/8, б) 1/2, в) 0,0602.
1.4.4. а) 1/20, б) 41/50, в) 20/346.
1.4.5. а) 4/15, б) 11/30, в) 1/5, г) 3/10.
1.4.6. а) 7/120, б) 1/20, в) 1/150.
1.6.1. а) 1/2, б) 1/2, в) 2/3, г) 1, д) 5/6, е) 2/3.
1.6.2. а) 4/13, б) 1/52, в) 10/13, г) 5/52, д) 1/4, е) 0, ж) 1/52, з) 1/23, и) 0.
1.6.3. а) 0,0723, б) 0,1493, в) 0,9955, г) 0,7826, д) 0,0769, е) 0,2174.
1.6.5. 0,8075.
1.7.1. а) 0,9246, б) 0,9468, в) 0,062.
1.7.2. а) 0,0501, б) 0,0729.
1.7.3. а) 0,2, б) 1/2, в) 1/8.
1.7.4. 3/4.
1.7.5. 0,99639.
1.7.6. а) 0,1, б), 1/2.
1.7.7. а) 1/2, б) 1/3, в) 2/3.
1.8.1. Зависимые.
1.8.2. а) Независимые, б) независимые, в) независимые.
1.8.4. а) Независимые, б) независимые.
1.9.1. б) 1/8.
1.9.2. б) 0,7298, в) 0,3001, г) 0,0111.
1.10.1. а) 0,1406, б) 0,0156.
1.10.4. а) 0,0123, б) 0,5926.
1.10.5. а) 350, б) 150, в) 105.
1.10.6. а) 0,6811, б) 0,2701, в) 0,04877, г) 0,3189.
1.10.7. а) 10, б) 4, в) 5.
1.10.8. а) 0,1268, б) $4{,}32\cdot10^{-5}$, в) $4{,}36\cdot10^{-4}$

К главе 2

2.2.1. б) 0,37597, в) 0,05469.
2.2.2. а) 0, б) 0,125, в) 0,5.
2.2.3. а) 1, б) 0,6321, в) 0,3679, г) 8647.
2.2.4. а) $A = 1/2$, $b = \pi/4$, б) $1/2 - 2^{1/2}/4$, в) 1/2.
2.3.1. б) 0,7734, в) 0,1718.
2.3.2. б) 0,2325, в) 0,6321.
2.3.4. б) 0,9653, в) $9{,}158\cdot10^{-3}$
2.4.1. а) 2, б) 5, в) 1.
2.4.2. а) 0. б) 0,758, в) 0, г) 0,758.
2.4.3. а) 1/18, б) 4, в) 18, г) 2, д) —1,6, е) $2\cdot6^n/(n+2)$.
2.4.4. а) 12,5, б) 93,75, 9,68, в) 0,2373.
2.5.1. а) 0,9772, б) 0,4772, в) 0,0228.
2.5.2. а) 1875, б) 26,875, в) 0, г) 1750.
2.5.3. а) 1, б) 4, в) 0,8413.
2.5.4. а) $0{,}2867\cdot10^{-6}$, б) 0,9987.
2.6.1. а) 12, б) 288, 0,0832.
2.6.2. б) 0, в) 15.
2.6.3. а) 32, б) 0,3127, в) 0,1054.
2.6.4. а) 0,9, б) 11,3, в) 0,003865.
2.6.5. а) $4{,}452\cdot10^4$, б) 0, в) 547,7.
2.6.6. а) 5, б) 10, в) 3.
2.7.1. а) $\pi^{-1}(1-x^2)^{-1/2}$, б) 0, в) 1/2, г) 1/3.
2.7.2. а) 58, б) 64, в) 6.

2.7.3. а) 0,632, б) 0,1353, в) 0,0667.
2.7.4. а) 4000, б) 0,2865, в) 0,3935.
2.7.5. б) 0, в) 21.
2.8.1. а) 0,3679, б) 8.
2.8.2. а) $2\pi^{-1}(1-x^2)^{-1/2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, б) $2/\pi$.
2.8.3. а) 0,208, б) 0,944.
2.8.4. а) 5,1856, б) 8,0044.
2.9.1. а) 7,979, б) 12,533.
2.9.2. а) $r \exp\{(r_0^2 - r^2)/2\}$, $r \geqslant r_0$; б) 1,376.
2.9.3. б) 2,55.
2.9.4. а) 1/3, 1/3, б) 0, в) 25.

К главе 3

3.1.1. в) 9/16.
3.1.2. а) 4, б) x^2y^2, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, в) 3/16, г) $2x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, 0, $x < 0$, $x > 1$.
3.1.3. а) 1/4, б) 4/9.
3.1.4. а) 1/4, б) 12,25, в) 1,429.
3.2.1. б) 7,979.
3.2.2. а) $2x$, б) $2y$.
3.2.3. б) 5, в) 2.
3.2.4. а) $-2y$, б) -6.
3.3.1. а) 2/3 ln 2, б) 3/8, в) 88/315.
3.3.2. W и Y статистически не зависят друг от друга.
3.4.1. а) 76, б) 28, в) 28, 76.
3.4.2. а) 481, 325, б) —0,1644.
3.4.3. а) 16, б) 1/6, в) 421.
3.4.4. а) 3, б) $3^{1/2}/2$, в) $3^{1/2}/2$.
3.5.1. б) 0,25.
3.5.2. б) 7/8, в) 0,68.
3.5.3. а) 2/3, б) 0,161.
3.6.1. $\frac{3}{2}(e^{-t} - e^{-3t})\,\mu(t)$.
3.6.3. а) p, б) p, в) p, $p - 3p^2$.

К главе 4

4.2.1. а) 0,3727, б) 1/12, в) 455.
4.2.2. а) 0,2, в) 10^6.
4.2.3. а) 0,9897, б) 10, в) 17.
4.2.4. а) 12,5, б) 11,218, в) 12.
4.2.5. а) 0,663, б) 0,689.
4.3.1. а) 0,0617, б) $1{,}0 \cdot 10^{-3}$.
4.3.2. 5002.
4.3.3. 322.
4.4.1. а) 0,064, б) 0,0602.
4.4.2. а) $118{,}66 \leqslant \widehat{\overline{X}} \leqslant 121{,}34$, б) $116{,}42 \leqslant \widehat{\overline{X}} \leqslant 123{,}58$.
4.4.3. а) $118{,}95 \leqslant \widehat{X} \leqslant \infty$, б) $117{,}21 \leqslant \widehat{X} \leqslant \infty$.
4.5.1. а) Гипотеза принята, б) гипотеза отвергнута.
4.5.2. а) Гипотеза отвергнута, б) гипотеза отвергнута.
4.5.3. а) 91 %, б) $\overline{X} = 3{,}997$ года
4.5.4. а) 99,78, б) 38,94, 6,24, в) гипотеза верна.
4.6.1. б) $y = 0{,}5455 + 0{,}6344x$.
4.6.2. б) $y = 326{,}33 - 15{,}14z$.

К главе 5

5.1.1. б) 7776, в) 1/7776, г) 1/7776.
5.1.2. а) 2,5, б) 5, в) 5.

5.2.2. а) $(1/4{,}28)\exp[-(X_p-2)^2/8]$, б) δX_n, в) $\delta(X_pX_n)$.
5.3.2. а) 3, б) $9t^2+3$, в) 40.
5.4.2. а) Нестационарный. б) Стационарный в широком смысле.
5.6.1. а) 0,0362, б) 1/21.
5.6.2. 1,054.

К главе 6

6.1.1. а) 0,606, б) 3,16, в) 16,07.
6.1.2. а) Стационарный в широком смысле. б) Стационарный в широком смысле. в) Нестационарный в широком смысле. г) Стационарный в широком смысле.
6.2.1. а) $T_1/(2T)$,
б) $(1/2)(T_1/T)[1-|\tau|/T_1)$ при $j=k$ для $|\tau|\leqslant T_1$;
$(1/4)(T_1/T)[1-|\tau-(j-k)T|/T_1)$ при $j\neq k$ для $|\tau-(j-k)T|\leqslant T_1$; 0 при других τ.
6.2.2. $(1/4)(T_1/T)[1-|\tau-kT|/T_1]$ для $|\tau<kT|\leqslant T_1$; 0 при других τ.
6.2.3. $(1/T)\,G(\tau)$.
6.3.2. б) 9, в) $(3/2\tau)\sin 6\tau$.
6.3.3. а) ±6, 146, 110, б) 0, 1, 3, Гц, в) 0,318.
6.3.4. Только при $T=2$.
6.4.1. а) 0,0362, б) —0,0460, в) —0,0387.
6.4.2. а) 0,1740, б) 0,1664.
6.4.3. а) $0{,}959-35{,}52|\tau|$, б) 0,0345.
6.4.4. 2118.
6.5.1. $A^2\exp[-\alpha|\tau|]$.
6.5.2. $2A^2\exp[-\alpha|\tau|]$.
6.5.3. а) 10,0, б) 10,0, в) 10.
6.5.4. а) $\overline{X}=0, \sigma_x^2=5$, б) дифференцируемая.
6.7.4. $32(\tau-1)\exp[-(\tau-1)^2]$.
6.8.1. а) 10,00005, б) 0,146.
6.8.2. а) $(0{,}1/2)\sin(\theta-\varphi)$.
6.8.3. б) $\tau_{\max}=1$, $\tau_{\min}=0{,}1$, г) 60 м/с.
6.8.4. 0,281 нс.
6.9.2. 3.

К главе 7

7.1.1. а) 6, б) $2M(\sin\omega T)/\omega$, в) $12(\sin\omega T)/\omega$, г) $\sigma(\omega)$.
7.2.2. 4.
7.2.3. а) 16, б) 1, в) 16, г) 4.
7.3.1. а) Нет, б) да, в) да, г) нет, д) да, е) нет.
7.3.2. а) 3, б) 83,5.
7.3.3. а) 4, б) 40, в) 0, ±6, ±12.
7.3.4. а) 1, б) 1.
7.4.1. а) $16(-s^2+36)/(s^4-13s^2+36)$, б) Полюсы ±2, ±3, нули ±6, в) 0,573.
7.4.2. в) 11,39.
7.5.2. а) 11,2, б) 11,2.
7.5.3. 0,05.
7.5.4. 7.
7.6.1. а) 10, б) $800(\sin^2 0{,}025\omega)/\omega^2$; в) $R_X(\tau_1)=0$, $S_X(f_1)=0$.
7.6.2. а) 24, в) 0,0403.
7.6.3. а) $50/\pi$, в) $50/\pi$.
7.6.4. $40/(25+\omega^2)$, б) $4\exp[-5|\tau|]$.
7.7.2. а) $10[\sin(1000\tau\pi)/1000\tau\pi]$, б) 0, в) 0, 4,135.
7.8.1. а) 1, б) 0, в) $16/(\omega^2+16)$.
7.8.2. $(16-\omega^2)/(16+\omega^2)$.
7.9.1. в) 0,00299.
7.9.2. Спектральное окно Хэмминга имеет меньший уровень боковых лепестков.

7.10.2. а) 19,2, б) 79,4.
7.10.4. а) $2B_1(2^{1/n}-1)^{1/2}$, б) $2B_1(100^{1/n}-1)^{1/2}$.

К главе 8

8.2.1. б) 5, в) 64.
8.2.2. а) $^4/_5 B\cos(20t+0)-{}^2/_5 B\sin(20t+0)$, б) 0, в) $0,8B^2$.
8.3.1. а) 0, б) 5, в) 5.
8.3.2. а) 0, б) $8e^{-1}$, в) $8e^{-1}$.
8.3.3. а) 0, б) 1/8, в) 1/8.
8.3.4. 6.25.
8.4.1. а) $0,5\exp[-10^1|\tau|]$, б) 1/2.
8.4.1. а) 9/4, б) 35/12, в) $(35/12)-3|\tau|+4\tau^2-{}^5/_3|\tau|^3$ при $-1\leqslant\tau\leqslant 1$ и $^9/_4$ при других τ.
8.5.1. 5.
8.5.3. $R_{XY}(\tau)=(13/2)-\tau$, $R_{YX}(\tau)=(13/2)+\tau$.
8.5.4. $50\exp[-1000\tau]$ при $\tau\geqslant 0$, $-50\exp[1000\tau]$ при $\tau<0$.
8.6.1. а) $^2/_3 A^2$.
8.6.2. а) 2/3, б) $(1,1/3)\cdot 10^2$, в) $(1,1/3)\cdot 10^{-2}$.
8.6.4. а) $5,7\cdot 10^{-3}$, б) $2,65\cdot 10^5$, в) $1,6\cdot 10^3$.
8.7.1. а) $(s+1)/(3s+1)$, б) $[s^2(s^2-1)/(9s^2-1)]\times 1/(s^2-16)$.
8.7.2. в) $46656/(-s^6+46656)$.
8.8.1. а) $\omega^2(\omega^2+1)/2(9\omega^2+1)(\omega^2+16)$,
б) $\omega^4/2(9\omega^2+1)(\omega^2+16)(\omega^2+4)$.
8.8.2. а) $20\cdot 216^2/(\omega^2+1)(\omega^6+46656)$, б) 20.
8.8.3. 0,04.
8.10.1. а) 1, б) $1,047B_{1/2}$.
8.10.2. а) 0,1875, б) 12, в) 12.
8.10.3. а) $1/(2s+4)$, б) 0,13, в) 2,63.
8.10.4. $(1/\pi)\cdot 10^{-8}$.
8.10.6. $(W/2)(\pi/1,386)^{1/2}$.
8.10.8. а) $F_1+[(F_2-1)/G_1]$, б) $6,1\cdot 10^5$, в) 1,57.

К главе 9

9.2.1 Критерий максимума отношения сигнал/шум: (в), (г), критерий минимума среднего квадрата ошибки: (а), (б), (д), (е).
9.2.2. а) $40b^2/\pi[b^2+(160\pi)^2]$, б) $4b^2/\pi[b^2+(160\pi)^2]$,
в) $2b^2/5\pi[b^2+(160\pi)^2]$.
9.4.1. а) 80, б) 1,1.
9.4.2. 0,648.
9.4.3. а) 3, б) 9,16.
9.4.4. а) 1,59, б) 1,43.
9.5.1. а) $s(2-t)u(t)$, б) 46,67, в) 20.
9.5.2. а) 50, б) 2,661.
9.5.3. а) N, б) 100.
9.5.5. а) $10^{-4}\exp[-10^{-5}(4,6\cdot 10^{-5}-t)]u(t)$, б) $0,5\cdot 10^{-13}$.
9.6.1. а) $16/(0,1\omega^2+17,6)$, б) 0,6.
9.6.2. а) $9,27/(s+(176)^{1/2})$, б) 0,927.
9.6.3. а) $4/(\omega^2+4)$, б) 1/2.

Предметный указатель

Оглавление

ISBN 5-03-000356-8 (русск.)
ISBN 5-03-000814-9 (англ.)